Das Verständnis einer grossen Menge von Chips

Constance Kamii (2004, S. 26-28)

Übersetzung und Kommentare: Stefan Meyer, Schulpsychologischer Dienst des Kantons Solothurn, 1994 sowie HfH 2018. Mit Anmerkungen zu einer Untersuchung von Brugger, Sidler & Meyer (2007) und kritischen pädagogischen Kommentaren.

Auch diese Untersuchung (Kamii, 1986) zeigt den stufenweisen Aufbau des Zehnersystems im Zeitraum der zweiten bis fünften Klasse. Ich interviewte hundert Genfer Kinder der ersten bis fünften Klasse. Sie besuchten die Volksschule in einer Gegend, in der vor allem die untere Mittelschicht wohnte. Die Anzahl der Kinder betrug auf jeder Klassenstufe zwanzig, das war immer die ganze Klasse.

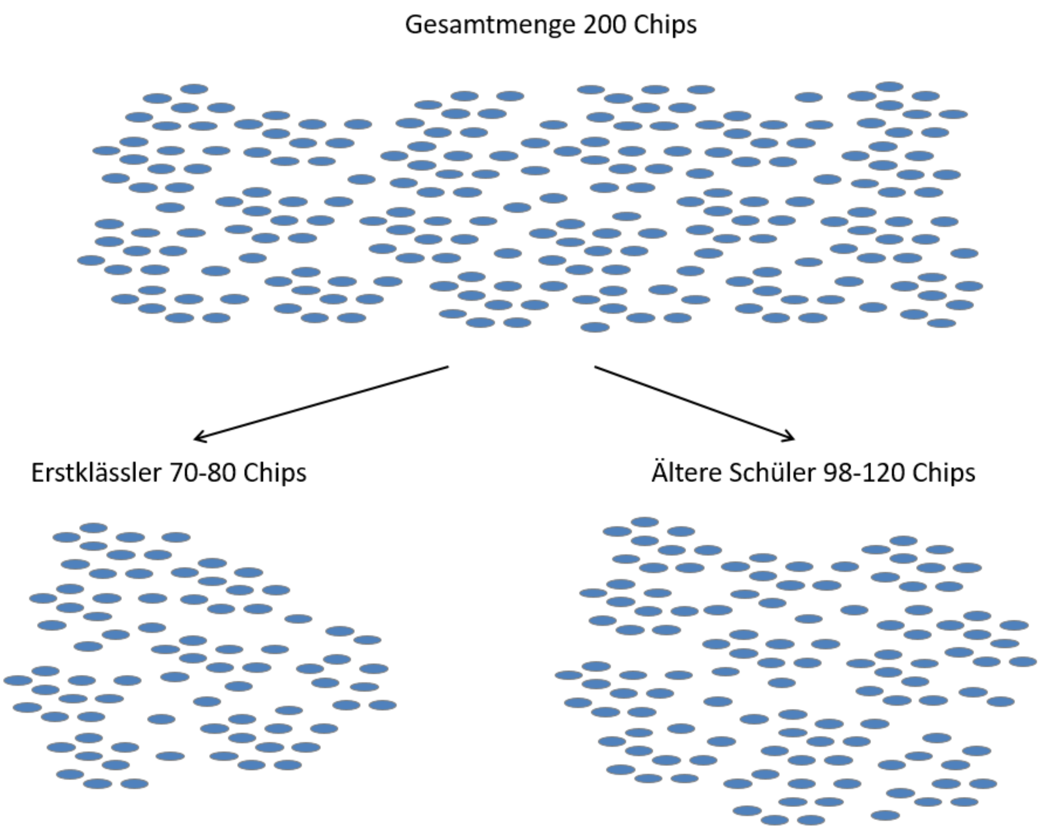

Abbildung 1: Grundmenge, Zuteilung der Teilmengen (eingefügt v. Übers.)

Ich verwendete zweihundert identische Plastik-Chips für die Einzelinterviews. Ich sagte den Kindern: "Ich habe einige Chips unter meiner Mappe versteckt und ich zeige dir diese Chips einen sehr kurzen Moment lang. Dieser Moment ist zu kurz, als dass die Chips gezählt werden können."

Ich zeige die Chips während drei Sekunden. Dann sagte ich dem Kind: "Schreib die geschätzte Zahl auf, bevor du sie zählst".

Die Erstklässler bekamen siebzig bis achtzig Chips zu sehen, die älteren Kinder achtundneunzig bis hundertzwanzig. (Die Anzahl änderte sich von Kind zu Kind, damit der gegenseitigen Information in der Klasse zuvorgekommen werden konnte.).
Wenn das Kind die geschätzte Zahl aufgeschrieben hatte, fragte ich es: "Zähle die Chips, damit du herausfindest, wie nahe die geschätzte Anzahl war."
Dann bat ich das Kind, seine Augen zu schliessen, damit ich einige Chips unter meiner Hand verstecken konnte.
Damit herausgefunden werden konnte, wie viele Chips ich versteckt hatte, bat ich das Kind, die restlichen Chips auf dem Tisch zu zählen, diesmal allerdings in Zehnerschritten.

Die erste Aufforderung zum Zählen diente dem Zweck der Beobachtung, wie die Kinder eine grosse Anzahl von Chips spontan zählten.

Die zweite Aufforderung sollte beobachtbar machen, wie die Kinder in Zehnern zählten.

Alle Erstklässler und die meisten der andern zählten die grosse Menge der Chips spontan in Einerschritten. Das spontane Zählen in Zehnerschritten, indem das Ganze in Zehnerhaufen eingeteilt worden war, erschien das erste Mal in der vierten Klasse, nur bei vierzehn Prozent. (Ich war so erstaunt über das Ausmass des Vorzuges, den die Kinder dem Zählen in Einerschritten gaben, dass ich manchmal Viert- und Fünftklässler fragte, alle zweihundert Chips zu zählen, um zu sehen, ob sie auf das Zählen in Zehnerschritte umstellen würden. Sie zählten weiterhin in Einerschritten.)

Diese Aufgabe lässt erkennen, dass das Zählen in Zehnerschritten Probleme im Herstellen von Beziehungen zwischen Teil und Ganzen einbezieht.
Tabelle 2.8. zeigt, was passierte, wenn ich die Kinder bat, in Zehnerschritten zu zählen.

Niveau 1:

Das unterste Niveau der Antworten, oben auf der Tabelle, lautet "keine Idee, wie das geht". Es enthält eine breite Vielfalt von Verhalten, ausgehend von der Aussage "ich weiss nicht wie..." bis zum Zählen einzelner Chips mit der Zahlwortreihe "10, 20, 30" usw.

Niveau II:

Die zweite Kategorie ist bezeichnend, sie lautet "Bilden von Zehnerhaufen, ohne Erhaltung des Ganzen". Wenn ich die Erstklässler bat, die Chips zu zehnt zu zählen, machten sie mit Leichtigkeit Zehnerhaufen. Sie taten es so, wie sie es in der Klasse eingeübt hatten. Wie auch immer, diese Kinder fuhren nicht fort zu zählen, nachdem sie die Zehnerhaufen gebildet hatten. Ich musste sie dann auch fragen, wie viele alle zusammen wären. Diese Kinder zählten die Haufen und antworteten "sieben". Ich rief aus: "Sieben Chips alle zusammen? - Ich sehe mehr als sieben", meine Meinungsverschiedenheit betonend. Die Erstklässler zählten daraufhin die Chips in einem Haufen und sagten "zehn".

Erst später kam mir der Gedanke, dass diese Kinder **nicht simultan** über die Haufen und die Chips in den Haufen nachdenken konnten. Weil sie nicht simultan über die Zehner und die Einer nachdenken konnten, fuhren sie fort zu sagen, dass eher sieben (Haufen) oder zehn (Chips), aber niemals siebzig da waren, wenn ich sie wiederholt fragte, wie viele Chips insgesamt auf dem Tisch lägen. Diese Erstklässler konnten nur herausfinden, dass es siebzig waren, indem sie in Einerschritten zählten, genau so wie die Kinder in der Untersuchung von Ross (1986), welche das Niveau II erreicht hatten.

Niveau III:

Keine Unterscheidung des Ganzen in seinen Teilen. Dieser Bereich war ebenso überraschend. Die Kinder dieser Kategorie zählten in Einerschritten. Sie zählten zuerst zehn Chips heraus und liessen sie in eine Gruppe. Dann zählten sie die nächsten zehn Chips heraus und machten einen separaten Haufen. Aber dann sagten sie "zwanzig", wenn sie den zweiten Haufen zum ersten hinzufügten. Dann zählten sie einen andern Zehnerhaufen heraus; sie trennten ihn räumlich vom Zwanzigerhaufen. Wenn sie den letzten Zehnerhaufen mit dem Zwanziger zusammenschoben, sagten diese Kinder "dreissig". Sie führten diesen Prozess fort, bis sie alle Chips gezählt hatten.

Niveau IV:

"Zehnerhaufen bilden mit dem Begriff des Ganzen". Das ist dasselbe wie Ross' (1986) höchste Entwicklungsstufe. Die Kinder in dieser Gruppe bildeten getrennte Zehnerhaufen. Danach zählten sie die

Haufen, um die ganze Zahl der Chips zu bestimmen. Im Gegensatz zu den Kindern auf dem Niveau II bildeten diejenigen von Niveau IV *Zehnerhaufen mit der Absicht zurückzugehen und die Chips in Zehnerschritten zu zählen.* Mit andern Worten: Die Kinder in Niveau IV konnten über beides simultan nachdenken, die Einer und die Zehner.

Das ist ein Indiz dafür, dass diese Kinder ein System aus Zehnern konstruiert haben, das auf dem Einersystem aufbaut.

Tabelle 1

Vier Niveau-Typen von Antworten zur Aufforderung, in Zehnerschritten zu zählen

Niveau	Klasse 1 (n = 21)	Klasse 2 (n = 18)	Klasse 3 (n = 21 *)	Klasse 4 (n = 22)	Klasse 5 (n = 18)
I - Keine Idee, wie es geht	7	1			
I I - Zehnerhaufen gebildet, aber keinen Begriff des Ganzen	6	0			
III - Das Ganze wird nicht in seine Teile aufgeteilt	8	10	4	14	4
IV - Zehnerhaufen und Begriff des Ganzen gebildet		7	17	8	14

* Das Verhalten von 2 Kindern (10 %) konnte keiner der vier Kategorien zugeordnet werden.

Anmerkungen: Die Rangkorrelation zwischen Niveau und Schulstufen beträgt nach Spearmans Rho $\rho=.53$, $p=.00$, kritisches $p \leq .05$ (nachgerechnet Stefan Meyer)

Das Niveau III wird verständlich im Hinblick auf diesen Entwicklungsprozess. Kinder, welche nur das Einersystem im Kopf haben, bilden zeitweise Zehnerhaufen, um dem Auftrag des Interviewers nachzukommen. Aber sie teilen das Einersystem nicht in Zehnersegmente auf, weil sie noch nicht in diesen Begriffen denken / operieren können.

Es wird ersichtlich in Tab. 2.8, dass das Zehnersystem (Niveau IV) das erste Mal in der 2. Klasse erscheint. Der Anteil der Kinder in dieser Kategorie nimmt später zu. (Der prozentuale Anteil nimmt in der 4. Klasse ab, aber das ist ein Problem der kleinen Stichprobe.)

Obgleich diese Untersuchung nur 100 Kinder mit einbezog, so wird es durch die 60 Jahre dauernde Forschung von

Piaget und seinen Mitarbeitern wiederholt belegt, dass die konkreten Operationen im Alter von 7 - 8 Jahren (2. Klasse) in einer Vielzahl von kognitiven Aufgaben erscheinen. Die Konstruktion der Teil-Ganze-Relation wurde in diesem Alter gefunden in der Klassifikation (Inhelder & Piaget, 1959/1964), in der Längenmessung (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1948/1960), bei einfachen Brüchen (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1948/1960) und bei der Kommutativität der Addition (Gréco, 1962).

Die vorangehenden Forschungsbefunde dienen nur als Hintergrund. Ich erkläre nun, weshalb man mit der Instruktion von Platzhaltern danebenliegt und weshalb es nicht wünschenswert ist, den schriftlichen Additionsalgorithmus in den ersten zwei Klassen zu lehren.

Literatur

Kamii, C. (1986). Place value: An explanation of its difficulty and educational implications for the primary grades. *Journal of Research in Childhood Education*, 1, 75-86.

Kamii, C. (1989). *Young Children Continue To Reinvent Arithmetic. 2nd. Grade*. New York: Teachers College Press. (https://www.tcpress.com/search?search_term=Kamii)

Anmerkung durch den Übersetzer

2005 wurde im Rahmen einer erweiterten, empirischen Replikationsstudie geprüft, ob sich das Verständnis des Zehnersystems und der darin verwendeten Symbole in den Stufen 2 bis 5 der Regelklassen in ähnlichen Bahnen entwickelt, wie das Ross (1986, zit. nach Kamii, 1989) in Kalifornien festgestellt hatte (vgl. Brugger & Sidler, 2005). Eine repräsentative Stichprobe von 80 Kindern aus der Innerschweiz löste u.a. auch die Chips-Aufgabe.

Die Rangkorrelation zwischen den Antwortniveaus und den Schulstufen wurde mit dem Verfahren nach Spearman berechnet. Es liegt ein monotoner Zusammenhang vor, wenn zwischen den Ausprägungen der steigenden Antwort- und Handlung- Niveaus und den ansteigenden Schulstufen ein positiver Zusammenhang besteht. Die Rangkorrelation beschreibt die Enge des Zusammenhangs (vgl. Bortz, Lienert & Boehnke, 2000).

Tabelle 2

Vier Niveau-Typen von Antworten zur Aufforderung, in Zehnerschritten zu zählen

Niveau	Klasse 2 (n = 20)	Klasse 3 (n = 20)	Klasse 4 (n = 20)	Klasse 5 (n = 20)
I - Keine Idee, wie es geht				
I I - Zehnerhaufen gebildet, aber keinen Begriff des Ganzen	5		1	
III - Das Ganze wird nicht in seine Teile aufgeteilt	11	4	7	3
IV - Zehnerhaufen und Begriff des Ganzen gebildet	4	16	12	17

Anmerkungen: Die Rangkorrelation zwischen den Niveaus und Schulstufen beträgt nach Spearmans Rho $\rho=.43$, $p=.00$, kritisches $p < .05$ (Brugger & Sidler, 2005; Brugger, Sidler & Meyer, 2007)

Wie Tabelle 2 zeigt, weist auch die innerschweizer Studie auf einen positiven, monotonen Zuammenhang zwischen den Entwicklungsniveaus im Zählen von Zehnerschritten und den Schulstufen vor. Aus der Genfer und der innerschweizer Studie sollten keine «Entwicklungs- oder Stufengesetze» in Bezug auf die Fähigkeiten, grosse Mengen in Zehnerschritten zu zählen, abgeleitet werden.

Methode und Material bestimmen Forschungsergebnisse

Klassifizierbare Lösungs- und Antwortstrukturen in Bezug auf das vorgelegte Material geben Hinweise auf die Art und Weise des Testens und der Erkenntnisinteressen. Arbeiten die Kinder wie bei Ross (1986) oder Kamii (1989), so ergibt das klinische Hinweise auf das sogenannte *strukturorientierte* Verständnis, bei dem beobachtet werden kann, wie die Kinder Teilmengen bündeln, um die Gesamtmenge darzustellen und zu erläutern. Das wird Bündelungsprinzip genannt. Die Notation der Zahlwörter macht deutlich, wie sicher das sogenannte Stellenwertprinzip gemeistert wird.

Würde man den Kindern in Tests Zahlenfolgen, Perlenketten oder einen Zahlenstrahl vorlegen, so bekäme man Einsichten in Strukturen des *positionsorientierten* Verständnisses von Mengen und Zahlbegriffen (vgl. Freesemann, 2014, S. 92-111).

Abbildung 2: Schneider-Messband

Flexible Interviews mit einer grossen Menge von einzelnen Centimetern eines Schneidermessbands gäben Aufschluss darüber, wie Kinder Strukturen und Positionen von Längen und Massbegriffen integrieren. Es könnten auch leere Einheitsquadrate mit einer Seitenlänge von 1cm sein, welche zu einem Meterstreifen zusammengefügt werden.

In allen Fällen lernen Schülerinnen und Schüler, wie sie eine konkrete Menge von Gegenständen oder Einheiten (Masse, Geld) strukturieren und zählen, bildlich und symbolisch sowie mündlich darstellen können. Nach Duval (1993) besteht im Konvertieren der Darstellungsformen mit Hilfe von Darstellungsmitteln der eigentliche Lernprozess.

Kamii (1989) und van der Walle (2016) formulieren als Grundsatz, dass die Entwicklung der Logik der Zählaktivitäten zentral ist für das Verständnis des Bündelns, des Zahlwortgebrauchs sowie der Einsicht in die schriftliche Darstellung der Zahlsymbole im dezimalen Stellenwertsystem. Das lässt den Schluss zu, dass *Kamii's* (1986) flexibles Interview als klassische Aufgabe gelten kann.

Die Forschung nach einem theoretischen Modell des Verständnisses des Zehnersystems muss mehr-dimensional sein (vgl. Ross, 1986). Gleichzeitig müssen systemische Aspekte berücksichtigt werden (vgl. Weltgesundheitsorganisation, 2011) wie das Interesse und die Welterfahrung der Kinder (vgl. Freudenthal, sowie die didaktische Analyse.

Wechselwirkungen einschränken oder ermöglichen

Wie angetönt, fehlen all diesen Ergebnissen und Prinzipien entscheidende Faktoren: die *Wechselwirkungen* zwischen dem Sozialen, dem Affektiven und dem Thema in der Welterfahrung (vgl. Wygotski, 1986; Pichon-Rivière, 2003; Imola, 2010). Freudenthal (1977) nennt bezeichnet das als aussermathematische Beziehungshaltigkeit. Die Integration der entwicklungspsychologischen Ergebnisse in die Pädagogik will nicht aufgehen, weil die theoretischen und die empirischen Grundlagen reduktionistisch sind. Gemäss Duden bedeutet Reduktionismus „isolierte Betrachtung von Einzelelementen ohne ihre Verflechtung in einem Ganzen oder von einem Ganzen als einfacher Summe aus Einzelteilen unter Überbetonung der Einzelteile, von denen aus generalisiert wird." Beispiel einer idealistisch-illusionären Fragestellung finden wir z.B. bei Gerster und Schultz (2004, S. 94): „Wir müssen die Perspektive wechseln: Was versteht das Kind unter einer Zahl, wenn diese für das Kind noch keine Stellenwerte, sondern nur *einen* Gesamtwert hat?“ Diese Fragestellung ist reduktionistisch, weil nach wie vor angenommen wird, dass das Verstehen ein Forschungsgegenstand sei, der sich im Kind isoliert untersuchen liesse (vgl. Bronfenbrenner, 1996; Wygotski, 1986). Reduktionismus geht mit verschiedenen Perspektiven umher, so zum Beispiel der klinischen, bei der Laborergebnisse *ohne didaktische Analyse* auf pädagogische Situationen übertragen werden. Ähnlich verhält es sich, wenn aus den klinischen-entwicklungspsychologischen Studien aufgabendidaktische Fördersets zusammengestellt werden, in der Annahme, die Denkstrukturen und Kompetenzen liessen sich mit Aufgabenblättern fördern. Die Forschungen zur Cognitive Acceleration (vgl. Adey, 2008) haben gezeigt, dass Förderung des Denkens in Anlehnung an Piaget und Wygotski viel differenziertere Bedingungen erfüllen muss. Freudenthal (1977) hat den Reduktionismus des Mathematikunterrichts selber in Frage gestellt und ihn als illusionäres System bezeichnet:

> Das sind natürlich nicht die Beziehungen, die ich meine. Ich meine überhaupt kaum die Beziehung innerhalb des Faches, d. h. innerhalb der Mathematik. Soweit sie natürlich sind, ergeben sie sich von selber; wenn sie künstlich sind, sind sie didaktisch wertlos; und ob sie künstlich sind, soll vom Standpunkt des Schülers entschieden werden. Der vollkommenste Ausdruck der innermathematischen Beziehungen ist das System. Wo alles so ausbalanciert ist, dass man nichts herausziehen kann, ist alles beziehungsvoll. Nur fragt es sich eben, ob ein Schüler solch ein mit Mühe konstruiertes System verstehen kann. Es fragt sich nicht nur, es ist ganz unwahrscheinlich. Und es ist noch unwahrscheinlicher, wenn das System selbst eine Illusion ist. Aber es ist das Schlimme, dass diese interne Beziehungshaltigkeit auf Kosten der externen Beziehung erreicht wird. (ebd., S. 76)

Die ethonomathematische Perspektive von Nunes, Carraher & Dias Schliemann (1993) zeigt beispielsweise, dass es neben dem instruktionszentrierten und didaktistischen Paradigma Fragestellungen und Methoden gibt, welche im sozialen Feld Themen der angewandten Mathematik ressourcenorientiert erforschen. Das Stichwort lautet „Street Mathematics“. Es geht um das Sachwissen und die arithmetischen Kompetenzen von Strassenkindern und Strassenhändlern, welche keine Schulbildung erhalten haben. Heilpädagogische Bildung ist gut beraten, wenn sie konsequenter mit Methoden der kritischen Pädagogik, der Ethnomathematik und der Systemtheorie arbeitet (vgl. D’Ambrosio, 2002; Freire, 1979; Smith, 1999; von Braunmühl, 2006, Wink, 2011). Die flexiblen Interviews erweisen sich in diesem ressourcen- und situationsorientierten Feld als Schlüsselmethoden, wie in vielen Aktionsforschungen der HfH gezeigt werden konnte, so auch jüngst in der Masterarbeit von Joos Marti und Looser-Inauen (2017). Piaget (1967) umschrieb das Flexible Interview als ‚méthode critique‘ (kritische Methode). Sie hat das Potenzial, um Wechselwirkungen zu generieren, zu entwickeln und erkenntnistheoretisch zu durchleuchten.

Pädagogisch-didaktische Implikationen

Das isolierte entwicklungspsychologische Modell als solches ist ein Artefakt jenseits sozialer und pädagogischer Situationen (vgl. Piaget, 1966, 1967; Freudenthal, 1977; Gigerenzer, 1981; Bronfenbrenner, 1993; Imola, 2010; Jantzen, 1992).

Ein pragmatischer Lösungsweg besteht darin, dass zu den Themen und Lernformen konsequent systemisch-didaktische Analysen gemacht werden. Aktionsforschung überprüft deren Wirkung (vgl. Klafki, 1996; Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik, 2016). Darin spielt das flexible Interview sowohl eine diagnostische als auch eine prozessbegleitende Rolle.

Die Studien sowie Aktionsforschungen an der HfH verweisen auf zwei Tatsachen. Eine stattliche Zahl von Kindern aus Regelklassen haben bis in die vierte und fünfte Schulstufe Probleme mit dem Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems. Zudem haben Kinder und Jugendliche mit Lernbeeinträchtigungen auch noch auf der Oberstufe Probleme damit, während begabte Kinder 3-4 Jahre Vorsprung haben (vgl. Moser Opitz, 2007; Ruflin, 2008; Schreiner, 2016; Capiaghi, 2018).

Abbildung 2: Leslie Baker Housman (2000)

Abbildung 2 stellt eine Szene aus dem Video [«First Graders Dividing 62 by 5: A Teacher Uses Piaget's Theory»] dar. Die Lehrperson zeigt, dass es schon in traditionellen Lehrformen möglich ist, *Kinder über offene und indirekte Fragen zu ermutigen*, ihr Denken selbst bei anspruchsvollen Erstklassaufgaben auf die Probe zu stellen. Die Beispiele basieren auf den Entwicklungsprojekten von Kamii (1985, 1994, 2004). Sie hatte mehrmals mit Piaget und seinen Mitarbeiterinnen zusammengearbeitet und kann als Pionierin der Unterrichtsentwicklung im Sinn der Genfer Schule bezeichnet werden.

Schuler (2004) berichtete in „*Neue Erfahrungen mit dem Zehnerübergang*" über ein mathematikdidaktisches Unterrichtsprojekt. Darin wurde der Frage nachgegangen, ob Kinder mit deutlichen Lerneinschränkungen den Zehnerübergang auf eigenen Wegen entdecken und lernen können. Verschiedene Fallbeschreibungen aus zwei Einführungsklassen gaben Einblick, wie die Kinder ausgehend von ihren eigenen Lösungswegen (singuläre Phase) in die Auseinandersetzung mit Klassenkameraden und

–Kameradinnen begleitet worden waren (divergierende Phase). Dabei lernten sie, Phasen der Unsicherheit und Verwirrung zu überwinden. Allmählich kam es zu differenzierteren Lösungswegen und Rechenstrategien. Partnerarbeiten und regelmässig durchgeführte Kreisgespräche garantierten Klärungen offener Fragen und Divergenzen. Der Bericht weist darauf hin, dass es durchaus Methoden gibt, um Schülerinnen und Schülern ein solideres Verständnis zu ermöglichen.

Ausblick

Die Erörterung der Chips-Aufgabe (vgl. Kamii, 1989) ist wie ein Steinwurf ins Wasser. In den letzten 15 Jahren wurden die flexiblen Interviews an der HfH stetig weiter entwickelt und erforscht. Bewährt haben sich Ensembles von flexiblen Interviews, in denen Kindern und Jugendlichen die Gelegenheit gegeben wird, das Verständnis von Mengen und Zahlen mittels der Lieblingsspielzeuge oder z.B. des Geldes oder anderer Sachthemen (Arithmetik, Geometrie) darzustellen. Kinder und Jugendliche stellen ihre Kompetenzen gern an sach- und lebensweltorientierter Mathematik auf die Probe. Die Wechselwirkungen in diesen Interviews sind auch für die Lehrpersonen entscheidende Bausteine der Entwicklung der pädagogischen Kompetenzen.

Kombiniert man Methoden wie das flexible Interview, das Freispiel (vgl. Bodrova, 2008; Bodrova & Leong, 2015) und die kognitive Akzeleration (vgl. Adey, 2008) *dynamisch* miteinander, wie das Schreiner (2016) in ihrer Aktionsforschung erprobt hat, so kommt es zu aussergewöhnlichen Entwicklungen von Kompetenzen in den Lösungswegen, Denkstrukturen, Beziehungen und Affekten. Erstklässler hatten eigene Projekte frei ausgewählt. Einer sparte Tausendernoten, weil er einst ein Haus für 1 Mio. Franken kaufen möchte. Ein Mädchen erläuterte auf einem Plakat, wie der elektronische Zahlungsverkehr mit Debitkarten funktioniert. Sie war es auch, welche in ihrer Bank den Schuldzins einführte, weil sie Geld verdienen wollte wie ihre Kameradinnen, welche Dorfläden unterhielten. Ein Mädchen mit einer Lernbehinderung arbeitete in der Parfümerie. Die Preise wurden realistisch angeschrieben (Fr. 69.95). Es lernte in dieser Zeit weit mehr als das mit gängigen Fördermitteln erwartet werden kann. In den Denkschulungen entdeckten die Kinder Sachverhalte und Strukturen, welche die Thematik der Chips-Aufgabe überschreiten. Sie erforschten den Wert von Geld mit Münzen wie Einfränklern, Zweifränklern, Fünflibern oder 5Rp., 10Rp., 20Rp. oder 50Rp. und natürlich mit den Banknoten. Sie entdeckten und übten die Strukturen der Darstellungsmittel (Symbole und Repräsentanten) implizit und explizit (vgl. Oerter, 2012). Im Freispiel integrierten sich die Lehrpersonen mal in der Rolle der Bankfachfrau, der Einkäuferin oder Begleiterin eines Kindes (vgl. Bodrova, 2008; Bodrova & Leong, 2015) und natürlich als Aktionsforschende.

Die klassische Chips-Aufgabe erweist sich als bedeutsame, adaptive und auf andere Themen übertragbare Vorlage in der Entwicklungsforschung und der Pädagogik.

Literatur

Adey, P. (Hrsg.). (2008). *Let's Think! Handbook. A Guide to Cognitive Acceleration in the Primary School*. London: GL assessment.

Bodrova, E. (2008). Make-believe play versus academic skills: a Vygotskian approach to today's dilemma of early childhood education. *European Early Childhood Education Research Journal, 16*(3), 357-369.

Bodrova, E., Leong, D.J. (2015). Vygotskian and Post-Vygotskian Views on Children's Play. *American Journal of Play, 7*(3), 371-388.

Bortz, J., Lienert, G.A., Boehnke, K. (2000). *Verteilungsfreie Methoden in der Biostatistik* (2., korrigierte und aktualisierte Auflage). Berlin: Springer-Verlag. 137-139

Bronfenbrenner, U. (1993). *Die Ökologie der menschlichen Entwicklung. Natürliche und geplante Experimente*. Frankfurt a.M.: Fischer Taschenbuch Verlag.

Brugger, C., Sidler, A. (2005). *Mathematik (-Didaktik) - Quo vadis?* Unveröff. Diplomarbeit, Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik, Zürich.

Brugger, C., Sidler, A., Meyer, S. (2007). *Stellenwerte des Zehnersystems verstehen* (unveröffentl. Forschungsbericht). Zürich: Hochschule für Heilpädagogik.

Capiaghi, M. (2018). *Denkschulung stärkt alle. Kognitive Akzeleration in motivierenden Themen der Schulmathematik*. Masterarbeit. Zürich: Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik.

D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora Editrice.

Freesemann, O. (2014). *Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Freire, P. (1979). *Pädagogik der Unterdrückten*. Reinbek b. Hamburg: Rowohlt.

Freudenthal, H. (1975). Schülerleistungen im internationalen Vergleich. *Zeitschrift für Pädagogik*, *21* (6), 889–910.

Freudenthal, H. (1977). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (2., durchgesehene Auflage Bd. 1 und 2). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Gigerenzer, G. (1981). *Messung und Modellbildung in der Psychologie*. München: Ernst Reinhardt.

Imola, A. (2010). *Empathie und verstehen. Die Methode von Nicola Cuomo (R. Sauer & S. Meyer, Übers.)*Verfügbar unter: http://rivistaemozione.scedu.unibo.it [18.03.2012]

Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik (2016). Leitfaden Praxisberatung (PB, 2016). [Broschüre, Lernplattform]. Modulgruppe P02: Autoren.

Jantzen, W. (1992). *Allgemeine Behindertenpädagogik* (2. korrig. Aufl., Bd. 1). Weinheim: Beltz.

Joos Marti, R., Looser-Inauen, R. (2017). *Bedeutsame integrative Fördertätigkeit und adaptive Förderdiagnostik. Ahoi auf dem Piratenschiff.* Masterarbeit, Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik, Zürich.

Klafki, W. (1996). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. Zeitgemässe Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik* (5. Auflage). Basel: Beltz Verlag.

Kamii, C. (1985). *Young Children Reinvent Arithmetic*. New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (1994). *Young children continue to reinvent arithmetic. 3rd Grade*. New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (2004). *Young Children Continue To Reinvent Arithmetic. 2nd Grade* (2nd ed). New York: Teachers College Press.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche / Dyskalkulie*. Bern: Haupt-Verlag.

Nunes, T., Carraher, D.W., Dias Schliemann, A. (1993). *Street Mathematics and School Mathematics. Learning in Doing: Social, Cognitive and Computational Perspectives*. New York: Cambridge University Press.

Oerter, R. (2012). Lernen en passant: Wie und warum Kinder spielend lernen. *Diskurs Kindheits- und Jugendforschung*(4), 389-403.

Piaget, J. (1966). La psychologie, les relations interdisciplinaires et le système des sciences. *bulletin de psychologie*, *254*, *XX*, *5*, 1–13.

Piaget, J. (1967). *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant* (6ème édition). Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Pichon-Rivière, E. (2003). *El proceso grupal: del psicoanálisis a la psiocologia social I* (2a ed.). Buenos Aires: Nueva Visiòn.

Ross, S. H. (1986). *The Development of Children's Place-Value Numeration Concepts in Grades Two through Five.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.

Schuler, M. (2004). *Neue Erfahrungen mit dem Zehnerübergang* (Unveröff. Modul-Leistungsnachweis). Zürich: Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik.

Smith, L. T. (1999). *Decolonizing Methodologies. Research and Indigenous People*. London: Zed Books Ltd.

von Braunmühl, E. (2006). *Anti-Pädagogik. Studien zur Abschaffung der Erziehung* (Neuauflage. Kindle-Edition). Leipzig: tologo verlag.

Weltgesundheitsorganisation. (2011). *ICF-CY. Internationale Klassifikation der Funktionsfähigkeit, Behinderung und Gesundheit bei Kindern und Jugendlichen*. Bern: Hans Huber.

Wink, J. (2011). *Critical pedagogy : notes from the real world* (4th ed.). New Jersey: Pearson Education.

Wygotski, L. S. (1986). *Denken und Sprechen*. Frankfurt a.M.: Fischer.