Interkantonale Hochschule
für Heilpädagogik

Departement 1
Studiengang Sonderpädagogik
Vertiefungsrichtung Schulische Heilpädagogik
Schwerpunkt Pädagogik bei Schulschwierigkeiten

Die symbolische Auffassung eines Achtels

Bruchzahlen, Zahlenstahl und geometrische Modelle mit flexiblen Interviews verstehen

Stefan Meyer, HfH

Revidierte Version 30.01.2010; 2013; 2015

Versuchsanlage 7: die symbolische Auffassung eines Achtels: etwas Theorie 1

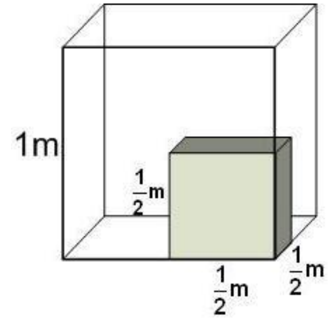
Der Zweck des flexiblen Interviews über die symbolische Auffassung eines Achtels besteht darin, das Wissen, die Widersprüche im Denken und die Handlungsmöglichkeiten (darstellen, begründen, untersuchen, berechnen) operativ zu untersuchen.
Dies erfordert, dass die VL über eine hohe fachliche, fachdidaktische und kommunikative Kompetenz verfügt. Kinder und Jugendliche fühlen sich aber auch wertgeschätzt, wenn sie von einer Pädagogin oder einem Psychologen ab und zu gefragt werden: «Würdest du mir helfen, eine gute Pädagogin zu werden, indem ich mit dir dieses FI durchführen darf?»

Der Würfel oder noch abstrakter der Einheitswürfel ist ein Bruchmodell. Er ist ein ausgezeichnetes operatives Mittel, erwerben doch die Kinder bereits in der Vorschule Erfahrungen damit. Diese Erfahrungen sollen als Fundamente und Ressourcen in die FI integriert werden.

Gleichzeitig wissen wir aus Forschungen, dass die Einsicht in die Geometrie des Würfels und der Transfer der Einsichten auf das Bruchrechnen mehrere Jahre erfordert (Piaget et al., 1975; Schuman, 1987; Hart, 2004; Meyer & Wyder, 2014).

Auch hier gilt der Grundsatz, dass das Darstellungsmittel aus Geometrie oder einem Mass «besteht», das von den Lernenden einsichtig beherrscht werden kann. Sonst läuft man Gefahr, Unverstandenes im Fach mit Unverstandenem in der Anschauung erklären zu wollen.

Die FI zum Bruchrechnen befassen sich also operativ *immer mit beiden Bereichen*: dem Mathematischen *(Q)* und dem Geometrischen. Eigentlich geht es um das Werden von Kompetenz zwischen den natürlichen Zahlen, den rationalen Zahlen und der Geometrie.



Versuchsanlage 7: die symbolische Auffassung eines Achtels: etwas Theorie 2

Wenn in der Explorationsstudie an den 164 Kindern und Jugendlichen der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe bei $p = .23$, so bedeutet es nicht nur, dass die Aufgabe für diese Schülerinnen und Schüler so schwer war. Der Schwierigkeitsgrad kann genauso ein Mass für die Schwierigkeiten in der Fachdidaktik der Erwachsenen sein.

Im Versuch wird mit einer Abbildung eines Kubikmeters ($1\ m^3$) gearbeitet.
Ergänzend kann auch mit Holzwürfeln gearbeitet werden, um die Strukturen der $\frac{8}{8}$ rekonstruieren zu lassen.

Allerdings geht es bei dieser Anlage nicht mehr um die Struktur des Volumens / des Raumes, sondern um das Verständnis der Berechnung des Volumens mit Hilfe von Bruchzahlen. Die Untersuchung der Formel ist nicht Hauptgegenstand dieses FI.

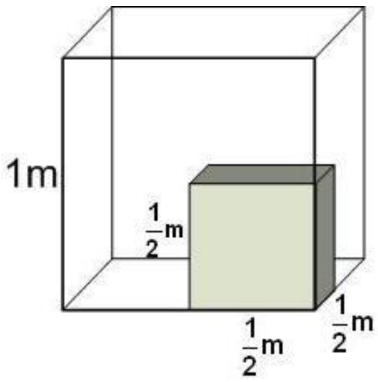
Literatur

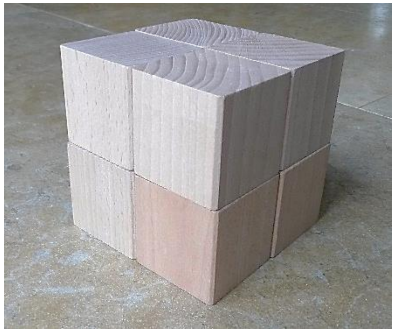
Meyer, S., Wyder, A. (2014). *Mathematik-Kurz-Test (MKT) 1-9.* [Lernplattform Ilias]. Verfügbar unter: http://www.ilias.hfh.ch/goto.php?target=fold_40021&client_id=ilias-hfh.ch [30.08.2014

Hart, K. M. (2004). Measurement. In K. M. Hart (Hrsg.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16 (11th. ed., S. 9-22). Eastbourne: Antony Rowe Ltd.*

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1975). *Die natürliche Geometrie des Kindes (Bd. 7). Stuttgart: Klett Verlag.*

Schumann, H. (1987). Zur Invarianz der Oberflächengrösse - ein Erkundungsexperiment mit 11- bis 12-jährigen Schülern. *Didaktik der Mathematik, 4, 268-284.*





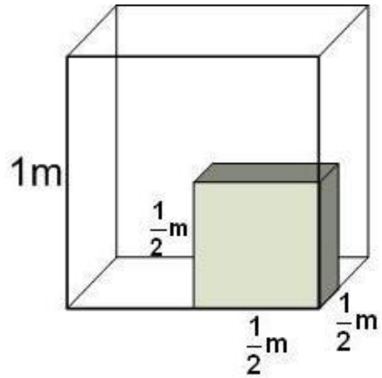
Versuchsanlage 7: die symbolische Auffassung eines Achtels: Instruktion

VL.: „Betrachte diese Zeichnung. Beim kleinen Würfel sind die Seiten überall halb so gross wie beim grossen Würfel. Immer einen halben Meter.
Du sollst nun das Volumen des kleinen Würfels berechnen. Wie macht man das?

Wenn das Kind den Lösungsweg (oder die Formel) nicht kennt, bietet man ihm die Hilfe an. Zeige mit dem Bleistift auf die Länge, die Breite und die Höhe des kleinen Würfels und frage: „Was gibt $\frac{1}{2}\text{m} \cdot \frac{1}{2}\text{m} \cdot \frac{1}{2}\text{m}$ für eine Zahl? Die Meter und die Kubikmeter musst du jetzt nicht beachten."

Wie auch immer das Kind / der Jugendliche antwortet, so sondiert man mit weiteren Fragen.

VL.: „Erkläre mir, weshalb die Zahl „…" ist (die genannte Zahl des Kindes aussprechen)? Du kannst es auch an der Zeichnung oder mit den Würfeln zeigen."



- z.B. Weshalb ergibt es die Bruchzahl $\frac{3}{6}$?
- z.B. Weshalb ergibt es die Bruchzahl $\frac{3}{8}$?
- z.B. Weshalb ergibt es die Bruchzahl $\frac{1}{8}$?
- «Zeig mir, wie du es gerechnet hast; zeig es mir bei dieser Zeichnung,
- oder wenn du willst bei diesen Holzwürfeln.»

Je nach Interesse könnte auch die Reversibilität des Wissens und die Einsicht in die Proportionen zwischen zwei Würfelgebilden $\frac{1}{8}$ m^3 und 8 m^3 geprüft werden. Siehe nächste Folie.

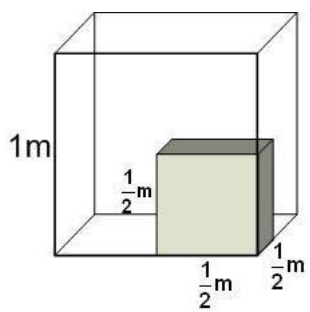
Danach schliesst man die Befragung ab.

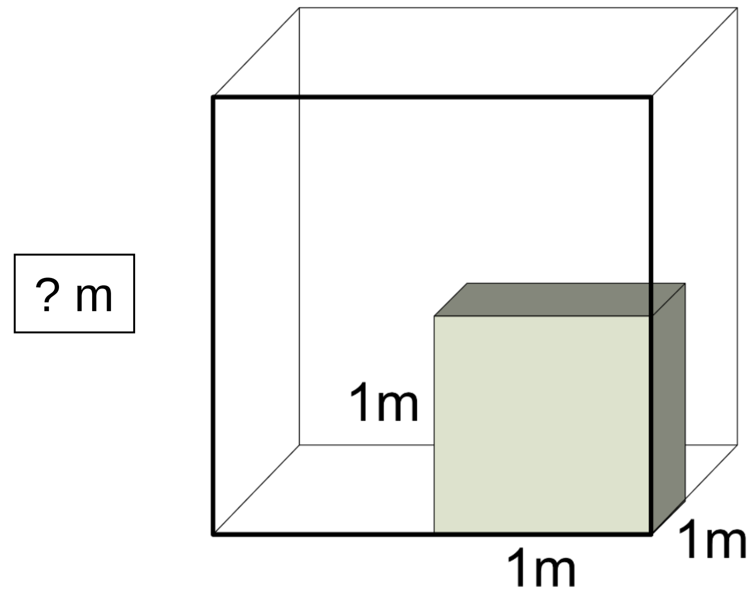
VL zum Kind: Danke sehr, dass du mitgearbeitet hast!

Versuchsanlage 7: die symbolische Auffassung eines Achtels: Instruktion für die Prüfung von *Proportionen*

Dieser Versuch ist noch nicht normiert worden.

VL.: „Betrachte diese Abbildungen. Beim kleinen Würfel sind die Seiten überall halb so gross wie beim grossen Würfel. Immer einen halben Meter. Und du hattest herausgefunden, dass das Volumen $\frac{1}{8}$ m^3 sein muss. Schau mal diese beiden Bilder an:»





«Hier hattest du $\frac{1}{2}\text{m}\bullet\frac{1}{2}\text{m}\bullet\frac{1}{2}\text{m}$ gerechnet.

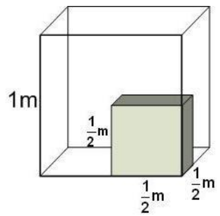
Und hier ist die Kantenlänge des grünen Würfels 1m.»

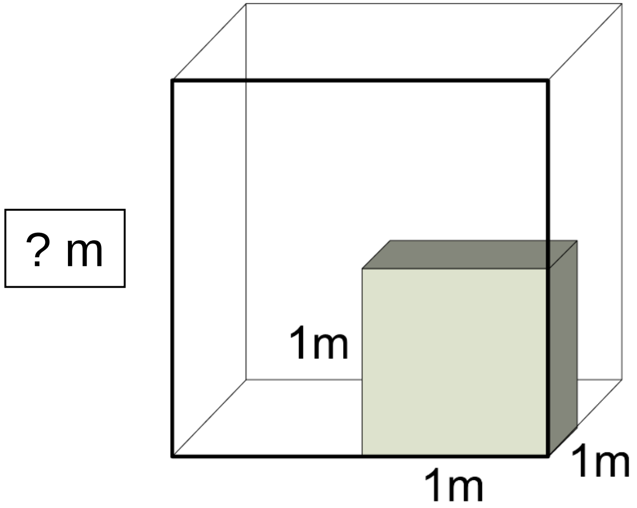
VL.: „Was glaubst du, wie gross die Kantenlänge des grossen Würfels ist?» (Zeige auf «?m», lass das Kind erklären, es sollte erkennen, dass es 2m sind. Sonst kann es von der VL. durch lautes Denken erklärt werden).

VL.: «Und wie müsste man das Volumen des grossen Würfels berechnen?» (Lass das Kind, den Jugendlichen die Antwort erklären.)

Siehe nächste Folie…

Versuchsanlage 7: die symbolische Auffassung eines Achtels: Instruktion für die Prüfung von *Proportionen*





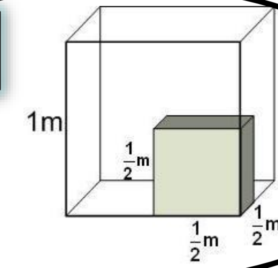
VL.: «Links ergab es ein Volumen von einem $\frac{1}{8}$ m^3, rechts sind es 8 m^3, wie erklärst du den Zusammenhang?»
($64 \cdot \frac{1}{8}$ m^3 = 8 m^3; kann die Jugendliche den multiplikativen Zusammenhang herstellen? $\frac{1}{8}$ $m^3 \cdot 8 \cdot 8$?)

Beobachtungen, Beurteilung der Antworten:

- Werden die grünen Würfel proportional zu den angedeuteten ganzen Würfeln von 1m bzw. 2m Kantenlänge integriert? (Klasseninklusion, Teil-Ganze-Relation)
- Wird erkannt, dass die Kantenlänge der grünen Würfel $\frac{1}{2}$ m und 1m sind, also doppelt oder halb so gross?
- Nimmt die Jugendliche den Faktor 2 in das Schema der <u>Volumenberechnung</u> auf? Im Sinne von: das Doppelte, mal das Doppelte mal das Doppelte gibt das Achtfache? Und umgekehrt: ein Halb mal ein Halb mal ein Halb gibt ein Achtel?
- Oder wird ausgehend von einer intuitiven Annahme «einfach etwas verdoppelt» oder halbiert?

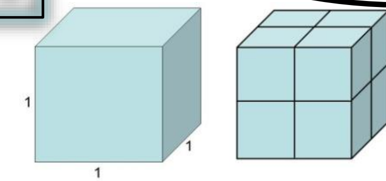
Die flexiblen Interviews, geordnet nach den Schwierigkeitsgraden *(p)*

7



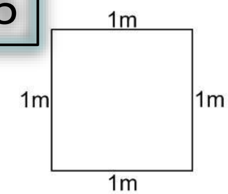
p = .23
n = 164

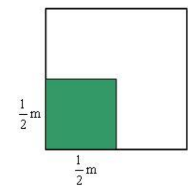
6



p = .20
n = 166

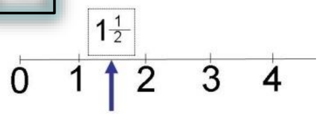
5





p = .20
n = 166

4



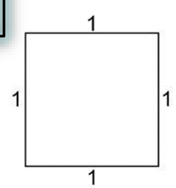
p = .50
n = 201

3

0	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	3	keine

p = .50
n = 203

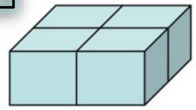
2



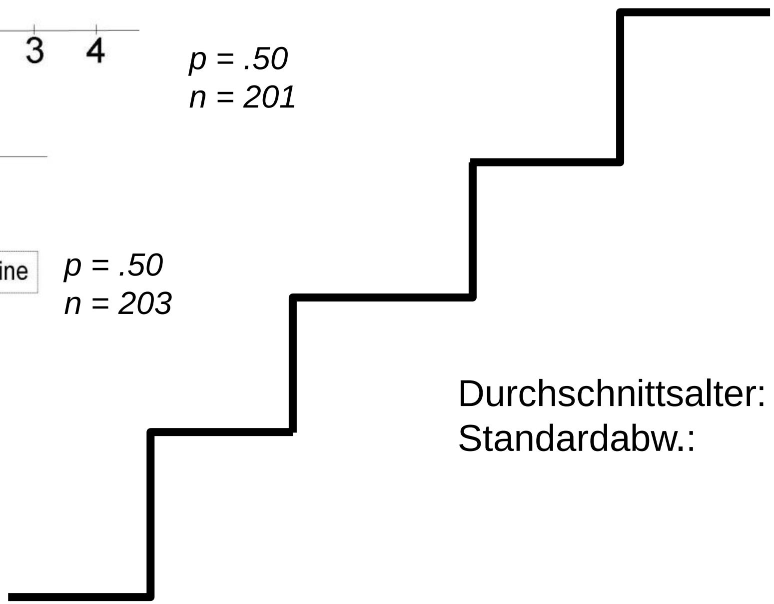
$\frac{1}{4}$

p = .76
n = 156

1

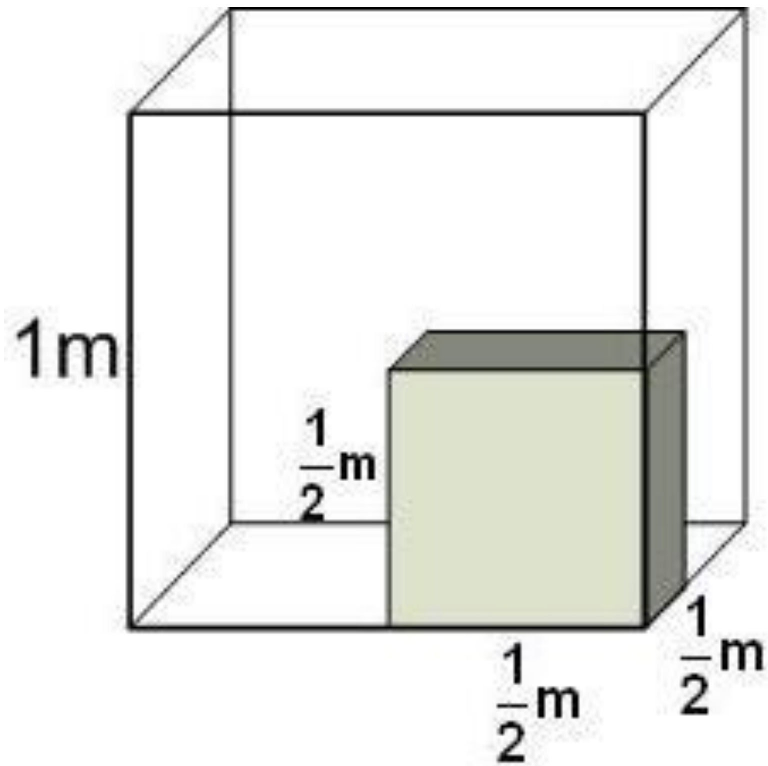


p = .80
n = 193



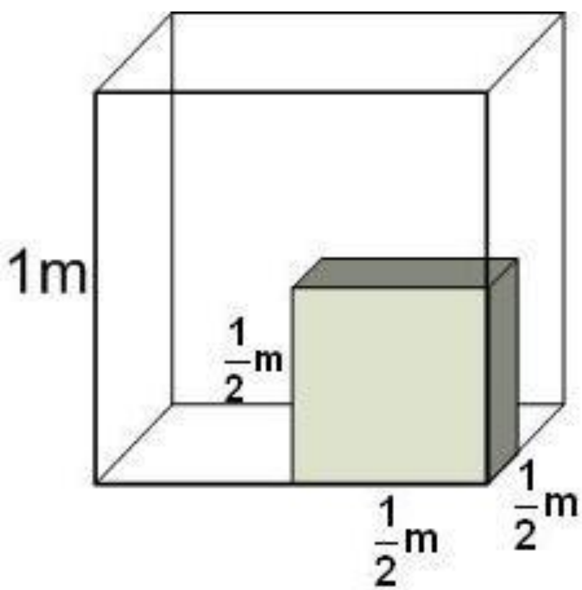
Durchschnittsalter: 10;8J.
Standardabw.: 3;4J.

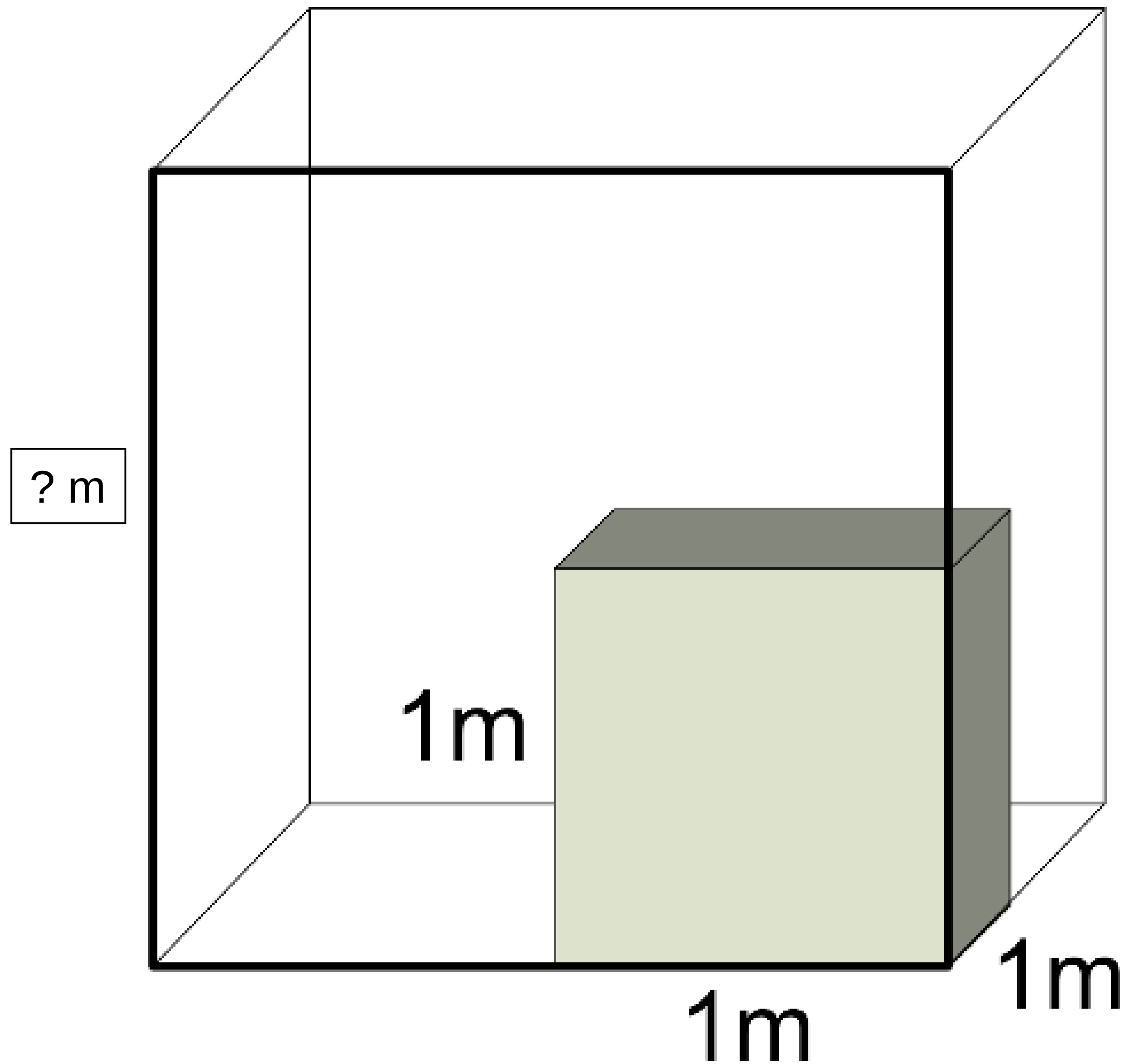
Versuchsanlage 7: Arbeitsblatt



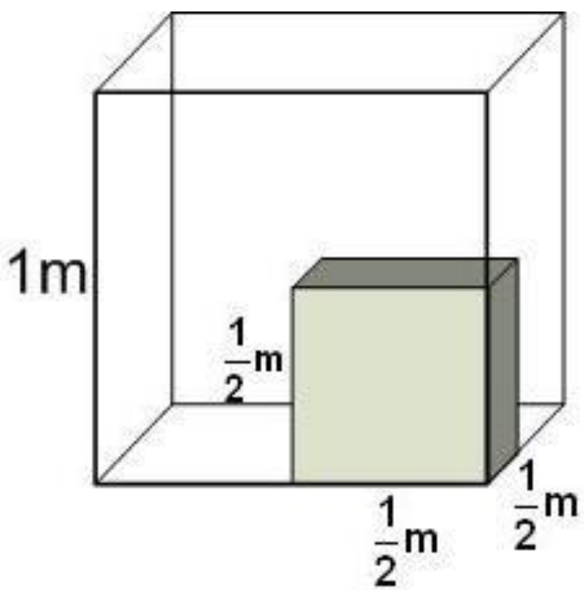
$$\frac{1}{2}\text{m}\bullet\frac{1}{2}\text{m}\bullet\frac{1}{2}\text{m}$$

Versuchsanlage 7: Vorlage *Proportionen*





Versuchsanlage 7: Vorlage *Proportionen Holzwürfel (alternativ)*



? m