HfH Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik

Invarianz - Variantenreich

Einblicke schaffen in die Werterhaltung im Umgang mit Geld (work in progress)

Stefan Meyer, Dozent HfH

August 2010; 03.09.2011; 24.10.2014

Inhalt

1. Einleitung

Pädagoginnen und Pädagogen beobachten wiederholt, dass Lernende noch in der dritten, der vierten und selbst in höheren Klassen der Primarschule behaupten, dass fünf Zehnernoten mehr Geld seien als eine Fünfzigernote. Daraus lässt sich schliessen, dass Probleme mit der Werterhaltung mehr sind als eine Frage der Vorkenntnisse um die Zeit des Schuleintritts (Krajewski, 2008; Moser Opitz, Schmassmann, 2007). Das Verstehen von Zahlen und (Wechsel-) Operationen ist eine permanente Herausforderung.

Die Entwicklung der Wahrnehmung, des Zählens, der Zahlbegriffe und der arithmetischen Operationen ist etwas Faszinierendes. Die Wege vom Nichtwissen zum Wissen, die Wege von den Meinungen zu den Überzeugungen bzw. vom Nichtkönnen zum Können sind und bleiben beschwerlich. Während dieser Entwicklung machen alle Lernenden die einen oder andern „Denkfehler“. Die Logik als Werkzeug der Mathematik (Lax in Imhasly, 2010) steht noch nicht vollumfänglich zur Verfügung. Bedürftig und Murawski (2010) differenzieren:

> Philosophisch ist Logik die Lehre vom richtigen Denken, von den Begriffen und Urteilen. Für den Mathematiker ist Logik mathematische Logik, die die formale Grundlage des mathematischen Sprechens und Beweisens beschreibt und mathematische Theorien untersucht. (ebd., S. 234)

Piaget und seine Mitarbeiterinnen erforschten die *Entwicklung* dieses Werkzeugs (Piaget & Inhelder, 1973). Die Denkfehler sind nicht nur arithmetische Unzulänglichkeiten, sondern es sind auch logisch mangelhaft hergestellte Beziehung des Denkens und / oder des Handelns (Piaget et al., 1990). Am leichtesten sieht man das in den Forschungsberichten über sogenannte Kapitänsaufgaben (Baruk, 1989), in denen Kinder immer wieder „Kraut und Rüben“ zusammenzählen oder subtrahieren, in der Annahme, dass sie dadurch die Lösung von unlösbaren Sachaufgaben finden würden. Die Analysen der Kapitänsaufgaben legen nahe, sowohl die Entwicklung des logisch-mathematischen Denkens als auch die Entwicklung der arithmetischen Kompetenzen als *Ensemble* und als *Wechselwirkung* aufzufassen. Die Kapitänsaufgaben sind jedoch auch ein Indikator für bestimmte Kulturen der Fachdidaktik im Mathematikunterricht und dessen Erforschung. Darum wird davon ausgegangen, dass Logik und Arithmetik etwas Soziales und gleichzeitig etwas Personales sind.

Was geschieht mit den Beobachtungen von logischen Unstimmigkeiten oder Irrtümern in der Pädagogik? Ich gehe davon aus, dass die Wahrnehmung logischer Unstimmigkeiten im Alltag spontan geschieht und dass diese „Fehler“ in der Familie, im Kindergarten, in der Schule usf. zügig korrigiert werden. In der Schulpsychologie und im Unterricht gehört der Umgang mit logischen Unstimmigkeiten, wie wir die Phänomene unzulänglicher Denkleistungen bezeichnen wollen, zur systematischen Aufgabe der Denkförderung bzw. der Denkschulung. Mit etwas Geschick kann man als Pädagoge oder als Psychologin entdecken, dass sogenannte Irrtümer oder logische

Unstimmigkeiten mehr Aufschluss über die Denkwege geben als richtige Lösungen. Nach Piaget und Inhelder (1973) entstehen Fehleinschätzungen und Interpretationsfehler dadurch, dass man einzelne Strukturen oder willkürliche Kombinationen wie z.B. die Seriation und die Klassifikation isoliert betrachtet.

Es ist naiv zu meinen, man könne logische Unstimmigkeiten durch das Vormachen oder eine isolierte Verbesserung beheben (DeVries, 2002). Das Denken zu schulen, ist ein anspruchsvolleres Projekt. Das zeigen das Handlungs- und Fortbildungskonzept der kognitiven Akzeleration (Adey, 2004).

Eine Funktion des logischen Denkens, mit der wir uns in diesem Essay genauer auseinandersetzen, ist die Fähigkeit, den Wert, die Bedeutung oder die Menge von Geld zu begreifen, ungeachtet seiner wahrnehmbaren Darstellungsformen: die Invarianz.

Ausgangspunkt des vieldiskutierten Begriffs und des klassischen Experiments zur Erhaltung der Zahl bildet die Umschreibung, welche Piaget und Szeminska (1975) verfasst haben.

> Daß die Invarianz, formelle Bedingung jeglicher Erfahrung und jeglicher Überlegung, weder für die Vorstellung der Wirklichkeit noch für den Dynamismus des intellektuellen Konstruierens erschöpfend ist, ist eine andere Sache. Wir sagen lediglich, daß die Invarianz eine notwendige Bedingung jeder verstandesmäßigen Tätigkeit darstellt. Ob diese Bedingung auch ausreichend ist, um der Verstandestätigkeit einerseits und der Wirklichkeit andererseits gerecht zu werden, darüber äußern wir uns nicht.
>
> Es ist klar, daß das arithmetische Denken sich keineswegs einer solchen Regel entziehen kann. Eine Menge oder eine Gruppe von Gegenständen ist nur vorstellbar, wenn ihr Gesamtwert unverändert bleibt, gleich welche Veränderungen in den Verhältnissen der Elemente eintreten mögen. Die Operationen, die man innerhalb einer Menge als „Permutationsgruppe" bezeichnet hat, zeigen mit Genauigkeit, daß man alle möglichen Permutationen mit den Elementen ausführen kann, ohne dabei die Gesamt-Potenz der Menge zu verändern. Ebenso ist eine Zahl nur in dem Maße verständlich, wie sie mit sich selber gleichbleibt, unabhängig von der Disposition der Einheiten, aus denen sie zusammengesetzt ist: das ist die sogenannte „Invarianz" des Zahlbegriffs. (Piaget & Szeminska, 1975, S.15)

Die Konzentration auf diesen Gegenstand bedeutet nicht, dass die Invarianz als Hauptfaktor der Entwicklung des arithmetischen Denkens und Handelns angesehen wird. Debatten, die von dieser Annahme ausgingen, verwischten die genetische Entwicklungspsychologie und die Mathematikdidaktik (vgl. Moser Opitz, 2001; Wember, 1986) und führten nicht wirklich neue Fragestellungen ein. *Nach Courant und Robbins (2010) forscht die Mathematik selber nach Invarianten.* Das heisst, dass die Beschäftigung mit der Invarianz immer wieder Anlässe bietet, um die Entwicklung des arithmetischen Denkens und Handelns von Lernenden zu erforschen und zu fördern.

Gleichzeitig fordert das Thema Invarianz auch die Mathematiklehrerinnen und –Lehrer heraus (Adey, 2004).
Ein entwickelter Zahlbegriff beinhaltet auch die Invarianz von Verhältnissen zwischen Zahlen, unabhängig davon, ob wir vor unendlich vielen Termen aus natürlichen oder rationalen Zahlen stehen. Invarianz von Zahlen ist somit Wissen und Können, *dass* eine Zahl den Wert behält, wenn die mit ihr verknüpften Terme wahre Aussagen oder Aussageformen über sie sind.
Das Geld ist insofern ein interessantes Studienobjekt, weil ein Geldwert in sehr verschiedenen Geldscheinen und Münzen enaktiv, ikonisch und symbolisch dargestellt werden kann. Das Wissen ist nach Piaget etwas Operatives (Piaget, 1976).

Wittmann (1982, S. 32) schlug operative Experimente vor, mit denen die kognitiven Schemata und die sogenannten Gruppierungen untersucht werden können. Nach Wittmann (ebd.) bestehen Gruppierungen erstens aus statischen Elementen, das können in unserem Fall Münzen oder Banknoten sein. Die Geldwerte erscheinen in bestimmten Gegenständen (Münzen, Banknoten) und werden mit bestimmten Begriffen bezeichnet. Zweitens besteht eine Gruppierung aus dynamischen Elementen. Damit sind die Transformationen (Operationen) gemeint, welche an den Werten und den damit verbundenen Objekten vorgenommen werden. Operative Schemata lassen sich zusammensetzen. Die dritte Komponente von Gruppierungen sind die Auswirkungen der Transformationen auf Eigenschaften und auf Beziehungen von Zuständen (Werten) bzw. Objekten (Münzen, Banknoten). Wittmann (1982, S. 32) schlägt Münzenkollektionen vor: „Durch passende Zusammensetzung von Hinzu- und Wegnahmeoperationen kann man komplexe Operationen (Wechseloperationen) erzeugen, die den Geldwert invariant lassen und die Anzahl der Münzen um 1 erhöhen bzw. erniedrigen.“

In Anlehnung an (Adey, 2004), an Courant und Robins (2010) und an Wittmann (1982) geht es in diesem Essay um didaktische Skizzen, mit denen dialogisch-operative Erforschungen von Invarianten beim Phänomen Geld angestellt werden können.

In diesem Essay werden nicht nur verschiedene Münzen, sondern auch *offene Aufgaben* mit Geldscheinen thematisiert. Die Aufgaben werden unterschieden zwischen Invarianzaufgaben ohne Wechseloperationen und Invarianzaufgaben mit Wechseloperationen. Die Wechseloperationen erfassen einen Ausschnitt aus den vielen Möglichkeiten des Wechselns.

Hinweis für die interessierten Pädagoginnen und Psychologen. Die Texte, die Theorie und die Experimente erscheinen in loser Folge auf der Webseite des flexiblen Interviews. Wenn man das ABC des flexiblen Interviews kennt, kann man diese neuen, offenen Aufgaben in Einzelsituationen oder in Gruppen erproben und erweitern. Es wäre schön, wenn dieses Thema fortlaufend durch Fallschilderungen von Praktikerinnen und Praktikern differenziert und bereichert werden könnte. Dazu gehören auch die Auseinandersetzungen mit andern Themen, in denen die Invarianz als Schema und als Sachverhalt untersucht werden kann (Schumann, 1987; Courant & Robbins, 2010).

Bei Fragen können Sie sich direkt an mich wenden: stefan.meyer@hfh.ch