

5.6 Das Invarianzexperiment mit Geldscheinen

Wie in Abschnitt 1 erwähnt, bezieht sich dieses flexible Interview auf die Schilderung einer Unterrichtsstunde. Einzelne Drittklässler sind gemäss der Lehrperson felsenfest überzeugt gewesen, dass fünf Zehnernoten mehr Geld seien als eine Fünfzigernote (dies ist in der deutschsprachigen Schweiz der Ausdruck für den Fünfzigfranken-Geldschein). Solche Behauptungen könnten schon bei den Zweifranken- oder den Fünffrankenstücken auftauchen. Sie wären, entwicklungspsychologisch und mathematikdidaktisch betrachtet, exemplarische und reichhaltige kognitive Konflikte, die man als Problemlöseaufgaben vorlegen könnte. Der Geldwert von Geldscheinen kann nicht direkt durch Abzählen (Quotität, Gréco & Morf, 1962) bestimmt werden. Der Wert als Menge von Franken ist abstrakt. Gleichzeitig wird er durch eine gesellschaftliche Konvention anschaulich symbolisiert.

Die flexiblen Interviews mit den Geldscheinen sind der Versuch, die Denkwege der Kinder beim Lösen dieser Probleme sichtbar zu machen. Dazu wurden ein einfaches und ein erweitertes Experiment entworfen. Dieses kann begabten Kindern bereits im Kindergarten vorgelegt werden. Es ist aber sehr wahrscheinlich, dass Kinder oder Erwachsene mit einer geistigen Behinderung mit diesen Experimenten Mühe bekunden.

Das einfache flexible Interview provoziert bei den Kindern Interpretationen und operative Rekonstruktionen mit Hilfe der Zehnernoten. Dadurch wird der Wert, bzw. die Geld-Menge von 50 Fr. in ein arithmetisches Verhältnis gesetzt:

50Fr. = $5 \cdot 10$ Fr. (das ist der multiplikative Ausdruck davon). Diese Geldmenge kann als dialektischer Begriff im Sinn der Kraft der Zehn aufgefasst werden. Das Kind kann fünf Zehnernoten als Fünfzigernote auffassen und umformen. Und umgekehrt weiss es, dass die Fünfzigernote u.a. aus fünf einzelnen Zehnernoten besteht. Diese Interpretation wird in der *Wechseloperation* konkret durchgeführt und während des flexiblen Interviews kommuniziert. Danach vergleichen die Kinder die Quantitäten zwischen der Menge von 5 Zehnernoten und der Fünfzigernote.

Beim erweiterten Invarianzexperiment mit Geldscheinen muss das Kind eine Geldmenge analog zu den Experimenten mit den Zweifranken- und den Fünffrankenstücken rekonstruieren. Fünf von acht Zehnfrankennoten werden umgewandelt und mit einer ursprünglichen Menge von acht Zehnernoten verglichen. Selbstverständlich können dem Kind zusätzliche erweiterte Invarianzversuche präsentiert werden.

Forschungen belegen seit einigen Jahrzehnten, dass die Einsicht der Kinder in das Zehnersystem eine komplexe und mehrjährige Entwicklung durchläuft (Ross, 1988). Die Autorin konnte zeigen, dass diese Entwicklung im Durchschnitt erst in der fünften Primarklasse als abgeschlossen angesehen

werden kann. Diese Resultate wurden in einer Replikationsstudie von Brugger, Sidler und Meyer (2007) auch für schweizerische Verhältnisse bestätigt. Moser Opitz (2007) stellte bei Schülerinnen mit Lernschwierigkeiten im mathematischen Bereich fest, dass sowohl in der fünften als auch in der achten Klasse beim Verständnis des Dezimalsystems grosse Lücken bestehen. „Bündeln, Entbündeln, Zahlaufbau, Grössenbeziehungen und in der Folge das Verständnis der Stellenwerte sind häufig nicht verstanden“ (ebd., S. 202). Ruffin (2008) machte in einem Schulversuch mit Oberstufenschülern ähnliche Erfahrungen. Trotz intensiver Behandlung des Zehnersystems zeigten die Schüler mit Lernschwierigkeiten massive Verständnisschwierigkeiten.

Daraus folgt, dass die Entwicklungskontrollen und die Förderung der Einsicht in das Zehnersystem eine Daueraufgabe sind. Der Invarianzversuch mit den Geldscheinen ist ein Element dieser Bemühungen. In ihm werden die Wechseloperationen der Darstellungsformen (u.a. auch das Bündeln und das Entbündeln), die Grössenbeziehungen und das Verständnis der Zahlsymbole auf die Probe gestellt.

5.6.1 Das einfache Invarianzexperiment mit Geldscheinen

Das Experiment besteht aus einer Voraufgabe und der eigentlichen Prüfungssituation. Zur Voraufgabe des Experiments gehört, dass man mit dem Kind die Vorerfahrungen mit der Fünzigfrankennote operativ erkundet. Man legt Spielgeld (Münzen und Geldscheine) vor das Kind und bittet es, einem die Fünzigernote zu zeigen und so gut es geht zu erklären. Interessante Einblicke in das Verständnis der Symbole werden geschaffen, wenn man überprüft, ob das Kind Argumente formuliert, welche auf *Lesevorgängen* beruhen. Diesbezügliche Vorerfahrungen können aus dem privaten oder dem schulischen Umfeld des Kindes stammen.

A) Vorübung zur Aufgabe mit der Fünzigernote

Die Versuchsleitung legt eine Fünzigernote vor sich hin. Nun bittet sie das Kind, dasselbe bei sich zu tun.

Abbildung 7**Vorübung A: Die Identität des Geldscheines erkunden**

Versuchsleiterin



Kind

Abbildung 7 illustriert die Situation bei der Vorübung zum Experiment mit der Fünzigfrankenote. Wenn die Geldscheine vor den beiden Personen liegen, fragt die Versuchsleiterin:

„Was kannst du über das Geld bei dir und bei mir sagen?“

„Was hast du, was habe ich?“ (Vermeide Sie es, in der ersten Frage die folgenden Ausdrücke zu verwenden: „Wie viel, mehr, weniger, gleichviel.“)

Wenn man sieht, dass das Kind noch keine Begriffe und Kenntnisse aufbauen konnte, sollten die Sachverhalte erläutert werden. Das bedeutet, dass man dem Kind eine Information über die Fünzigfrankenote gibt, ohne dass Wechseloperationen vorgestellt werden. Das heisst auch, dass man Aufgabe und die Gegenstände begrifflich erläutert. Diese Information kann bei der Arbeit mit fremdsprachigen Kindern sehr bedeutsam sein. Wenn man wahrnimmt, dass das Kind überfordert ist, kann man mit ihm aushandeln, ob es das nachfolgende Experiment noch machen möchte oder nicht.

Die Zusammenarbeit mit dem Kind wird protokolliert. Danach beginnt das Experiment. Je nach Untersuchungs- oder Klassensituation arrangiert man am Schluss des Experiments einen Ausklang, bei dem man nochmals auf die Arbeit zurückschaut und oder Ausblick hält, wie man an diesem Thema weiterarbeiten möchte.

B) Die Aufgabe mit der Fünzigernote

Die Instruktion lautet:

„Sieh mal, ich habe hier eine Fünzigernote. (Man könnte auch das Kind bitten zu sagen, was für eine Note vor der Versuchsleiterin liegt.) Vor dir liegt auch eine Fünzigernote, vgl. Abbildung 7.“

Tausche nun dein Geld mit diesen Zehnernoten um.“ Die Versuchsleiterin zeigt auf die im Depot liegenden Zehnernoten.

Wenn das Kind den Umtausch noch nicht beherrscht, hilft man dabei. Am Schluss soll die Anlage so aussehen wie in der Abbildung 8.

Abbildung 8

Invarianzprüfung mit den Geldscheinen



Versuchsleiterin

Kind

Die Versuchsleiterin stellt im Anschluss an die Wechseloperation gemäss Abbildung 8 in ruhigem Ton die folgenden Fragen:

„Hat es dasselbe bei den Geldscheinen hier und hier?“

„Hat es gleichviel Geld hier und hier?“

„Oder hat es irgendwo mehr?“

„Hat es irgendwo hier oder hier weniger?“

„Wie kommst du darauf?“

Beachten Sie, ob das Kind Mengenvergleiche gleich thematisiert, ob es die Noten zählt, ob es eher von der Wahrnehmung ausgeht und behauptet: „Ich habe mehr.“ Oder: „Fünf Zehnernoten sind mehr als diese Fünzigernote.“ Usf. Die Antworten werden protokolliert.

Interpretation der Antworten

Die Interpretation der Antworten erfolgt unabhängig von Altersangaben. Es geht vorerst um die qualitative Erfassung der Logik der Handlung sowie um die Erfassung der Logik und der Inhalte der Erklärungen des Kindes. Es lassen sich Gruppen oder Netzwerke von Argumenten und Handlungen unterscheiden. Diese werden qualitativ in drei Niveaus geordnet.

Noch keine Werterhaltung:

Das Kind kann den Unterschied und die Gemeinsamkeit zwischen der Anzahl der Geldscheine und dem Geldwert noch nicht herauschälen. Es geht immer wieder zum Zählen über: fünf Zehnernoten hier, eine Fünzigernote dort. Unter Umständen stellt es irgendeine figurale Aufstellung her, indem es die Geldscheine in eine Reihe oder auf eine Beige legt. Es könnte auch sein, dass es einfach sagt: „Das sind beides Noten“ (Geldscheine), was als Herstellungsversuch einer globale Übereinstimmung gedeutet werden kann. Oder es versucht, die Fünzigernote neben eine Zehnernote zu legen und so ein Paar zu bilden. Das Kind zählt die Zehnernoten in Einerschritten oder in Zehnerschritten, ohne das Resultat des Zählvorgangs in den Vergleich aufnehmen zu können.

Die Urteile sind weder in der Vorübung noch in der Prüfungsaufgabe werterhaltend. Das Kind koppelt den Wert an die Länge der Reihen, an die Grösse oder an die Farben der Geldscheine. Es kann auch sein, dass es mittels des Subitizing zwar fünf Zehnernoten erkennt, aber den Geldwert noch nicht bestimmen kann.

„Es hat hier (bei den Zehnernoten) mehr Geld, weil die Geldscheine weit auseinander liegen (oder länger sind: da ist es länger).“ „Es hat hier mehr Geld, weil 50 dasteht, hier steht nur 10, fünfzig ist grösser als zehn.“ etc. Weiter gehört dazu, dass sich das Kind durch die Grösse der Geldscheine beeinflussen lässt und sagt: „Da hat es mehr Geld.“

Die Frage nach der Anzahl der Geldscheine kann korrekt oder nicht korrekt gelöst werden.

Zwischenphase:

Die Ansammlungen werden durch eine korrekte 1:1 – Übereinstimmung hergestellt. Das heisst auch, dass die Wechseloperation 50Fr. → 10Fr. + 10Fr. + 10Fr. + 10Fr. + 10Fr. beherrscht wird. Z.B.: Fünfzig Franken sind 10 Fr., 20 Fr., 30 Fr., 40 Fr. und 50 Fr.“ Das Kind kann in Zehnerschritten bis fünfzig zählen.

Die Fragen nach der Werterhaltung führen zu folgenden Verhaltensweisen:

- Das Urteil des Kindes ist in der einen Situation werterhaltend, in der andern Situation aber nicht;
- Widersprüche zwischen Wahrnehmung und Aussagen werden z.T. wahr genommen, können aber nicht geklärt werden;
- Es kann sein, dass man Verzögerungen oder Schwankungen im Urteil feststellt in jeder Situation: „Es hat hier mehr Franken (mehr Geld) ... nein dort...es ist dasselbe bei beiden...“ etc.

Die Antworten zur Werterhaltung werden nicht untermauert durch ausformulierte und vollständige Argumente. Die Anzahl der Geldscheine wird korrekt bestimmt, die Schlussfolgerung auf die Werterhaltung besteht aber in einem „Rateprozess“: „Es hat hier 5 Zehnernoten... dann errate ich, dass auch da 5 Zehnernoten sein müssten.“ Die Wechseloperation zwischen der Fünzigernote und den addierten Zehnernoten (10Fr. + 10Fr. + 10Fr. + 10Fr. + 10Fr.) ist noch kein stabiles Verhältnis. Das gilt auch für die Wechseloperation zwischen der Fünzigernote und den multiplizierbaren Zehnernoten ($5 \cdot 10\text{Fr.}$). Die Invarianz als logisches Fundament der Feststellung der Äquivalenz von zwei unterschiedlich dargestellten, gleichmächtigen Mengen ist noch nicht gefestigt.

Wertesicherung

Die verschiedenen Anordnungs-Situationen bieten Anlass zu stabilen Urteilen über die Wertesicherung. Das Kind weiss, dass die Menge des Geldes von 50Fr. gleich bleibt, unabhängig von den möglichen Darstellungsformen (Münzen, Geldscheine). Das wird durch eines oder mehrere der folgenden Argumente gerechtfertigt:

- Argument der „Identität“: „Hier und dort hat es gleich viel Geld. Hier ist nur ein Geldschein, eine Fünzigernote. Aber es sind gleichviele Franken, weil aus einer Fünzigernote fünf Zehnernoten gewechselt worden sind.“ „Es spielt keine Rolle, wie man die Zehnernoten hinlegt, ausgebreitet oder auf einer Beige.“ „Fünfzig Franken sind eine Fünzigernote oder fünf Zehnernoten“, argumentiert das Kind im Sinn der Kraft es Zehners.
- Argument der „Reversibilität“: „Man könnte auch die andere Fünzigernote wechseln, genau gleich wie die Erste, die wir gewechselt haben.“ Man könnte die fünf Zehnernoten hier und die fünf Zehnernoten hier schön zueinander legen, dann sähe man, dass immer eine Zehnernote zu einer anderen Zehnernote passt. Es hat in keiner Reihe (oder auf keiner Seite) mehr Geld.“
- Argument der „Kompensation“. Dieses ähnelt zum Teil Argumenten der Reversibilität, siehe oben: „Die Zwischenräume zwischen den Zehnernoten können verschieden sein, die Länge der Reihe mit den Geldscheinen ist dann auch verschieden. Wenn man aber das Geld richtig zählt, sieht man immer wieder, dass es gleichviel ist.“ Oder: Die Abstände zwischen den Zehnernoten sind verschieden oder gleich, die Fünzigernote ist wie fünf Zehnernoten, deshalb bleibt es gleichviel Geld.“

Wenn das Experiment abgeschlossen ist, kann man je nach den Umständen das erweiterte Invarianzexperiment mit den Geldscheinen machen. Weitere Forschungen und Übungen mit Kindern im Unterricht sind notwendig.