

5.5 Das Invarianzexperiment mit einem Fünffrankenstück

Im vierten Interview wird der Anspruch an die Umwandlung weiter erhöht. Jetzt müssen die Kinder fünf Einfrankenstücken zu einem Fünfliber (Ausdruck in der Schweizer Mundart für die Fünffrankenmünze) umtauschen und ihn mit der Ausgangsmenge von sechs Einfrankenstücken vergleichen: $(1+1+1+1+1+1) ? (5+1)$. Die Münzen enthalten bildhafte, alphabetische und numerische Symbole. Das Geld erscheint als Sache (Münzen), als Zahlenwert (Bedeutung der Formen und Symbole) und als Tauschwert (Geld mit Geld tauschen). Der Tauschwert wird als Wert aufgefasst, um den sich die Wechseloperation dreht. Dies soll in diesem Experiment sichtbar gemacht werden. Die Präsentation der Münzen in diesem Experiment sind im Ansatz der Darstellung offen gegenüber zwei Formen von Veranschaulichung: dem Zwanzigerfeld und der Zwanzigerreihe (siehe Wittmann & Müller, 1990).

Das Fünffrankenstück ist eine abstraktere Darstellung der sogenannten „Kraft der Fünf“ (Wittmann & Müller, 1990). Die Autoren bemerkten dazu:

Das Zwanzigerfeld betont den kardinalen Aspekt der Zahlen. Durch die Fünfer- und Zehnereinteilung soll es den Kindern erleichtert werden, sowohl die einzelnen Summanden als auch die Summe simultan (ohne Abzählen) zu erfassen, wobei die „Kraft der Fünf“ einen wichtigen Dienst leistet. (ebd., S. 34)

Das Zwanzigerfeld besteht aus einer Vorlage, die Blöcke mit $4 * 5$ Kreisen enthält. Darauf können die Kinder Wendepfättchen legen und so die arithmetischen Operationen anschaulich begründen. Nach Wittmann & Müller (1990) wird mit dem Zwanzigerfeld der kardinale Aspekt der Zahlen betont, bei der Zwanzigerreihe (einer Reihe bestehend aus zwanzig Kreisen) gehen die Autoren davon aus, dass der ordinale Aspekt betont wird. Die Wechseloperation prüft beim Kind, wie es aus fünf Summanden mit dem Wert eins eine Teilsumme mit dem Wert fünf bilden kann. Der Vergleich der beiden Reihen prüft weiter, wie das Kind die Summen bildet und deren Werte vergleicht und zu guter Letzt die Äquivalenz, bzw. die Invarianz erkennt. Dabei wird auch beobachtbar gemacht, ob die Unabhängigkeit der Summen von der Lage oder der Anordnung der Elemente der beiden Reihen schon gedacht werden kann.

Vor dem Hintergrund der natürlichen Zahlen wird klar, dass das Fünffrankenstück nicht einfach ein statisches Symbol eines Wertes ist, sondern dass es eine Vielzahl von geldmässigen und abstrakteren arithmetischen Beziehungen enthält. Im Experiment geht es um die *Auseinandersetzung mit diesem Beziehungswissen*.

Zur Voraufgabe des Experiments gehört, dass man mit dem Kind die Vorerfahrungen mit Fünffrankenstücken operativ erkundet. Dies geschieht dadurch, dass man einen Geldbeutel mit Spielgeld (Münzen und Banknoten) vorlegt und das Kind bittet, einem die Sache so gut es geht zu

zeigen und zu erklären. Interessant im Bezug auf das Verständnis der Symbole ist, wenn man überprüft, ob das Kind Argumente formuliert, welche auf *Lesevorgängen* beruhen. Die Vorerfahrungen können aus dem privaten oder dem schulischen Umfeld des Kindes stammen. Es könnte gut sein, dass die Kinder Bezüge zum Zwanzigerfeld herstellen, mit dem sie im Unterricht gearbeitet haben.

Von diesem einleitenden Gespräch sollte man sich Notizen machen. Danach beginnt man mit dem Experiment. Je nach Untersuchungs- oder Klassensituation arrangiert man am Schluss des Experiments einen Ausklang, bei dem man nochmals auf die Arbeit zurückschaut und / oder Ausblick hält, wie man an diesem Thema weiterarbeiten möchte.

Vorübung und Situation zur Aufgabe mit dem Fünffrankenstück

Die Versuchsleitung legt 6 Einfrankenstücke auf den Tisch in eine Reihe. Nun bittet sie das Kind, eine gleichgrosse Anzahl von Einfrankenstücken zusammenzustellen (überprüfen, ob das Kind das Geldstück kennt).

A) Vorübung

„Leg gleichviel mit deinen Einfrankenstücken“

„Leg dasselbe mit deinen Einfrankenstücken“

„Leg dieselbe Anzahl Einfrankenstücke“

„Leg gleichviel Einfrankenstücke hin wie ich.“

„Leg nicht mehr und nicht weniger.“

B) Aufgabe mit dem Fünfliber

Beim Fünfliber kann der Geldwert nicht mehr allein mit dem Abzählen (Quotität, Gréco & Morf, 1962) der einzelnen Frankenstücke bestimmt werden. Dynamisch betrachtet ist die Quotität das erste stabile Zahlbegriffswissen im „Einersystem“, was bedeutet, dass jede Zahl als Summe (oder Produkt) von Summanden mit dem Wert eins rekonstruiert werden kann. Die Quotität spielt auch bei den höher strukturierten Zahlen, z.B. dem Einmaleins, nach wie vor eine Rolle: das Kind macht das, was es weiss, sensomotorisch und intellektuell. Die Kinder müssen beim Fünfliber abstrahieren, d.h. sie interpretieren ein Geldstück als Wert, bzw. als Geld-Menge von 5 Fr. (Quantität). Diese Geldmenge kann als dialektischer Begriff im Sinn der Kraft der Fünf aufgefasst werden. Das heisst, dass das Kind die fünf Einfrankenstücke als Fünfliber sieht und auffasst. Und umgekehrt weiss es, dass der Fünfliber u.a. fünf einzelne Franken beinhaltet. Diese Interpretation wird eigenhändig in der

Wechseloperation vorgenommen und während des flexiblen Interviews kommuniziert. Danach vergleichen die Kinder die Quantitäten zwischen der Menge von 6 Einfrankenstücken und den zu vereinigenden Teilmengen von einem Fünffrankenstück und einem Einfrankenstück.

Die Instruktion lautet:

„Sieh mal, ich habe hier ein Fünffrankenstück (prüfen, ob das Kind das Geldstück kennt). Tausche nun bei deiner Reihe von Einfrankenstücken mit diesem Fünfliber um.“ Die Versuchsleiterin zeigt auf den neben den Reihen liegenden Fünfliber. Siehe Abbildung 5.

Wenn das Kind den Umtausch noch nicht beherrscht, hilft man dabei. Am Schluss soll die Anlage so aussehen wie bei der Abbildung 6.

Abbildung 5

Anordnung der Münzen bei der Wechseloperation

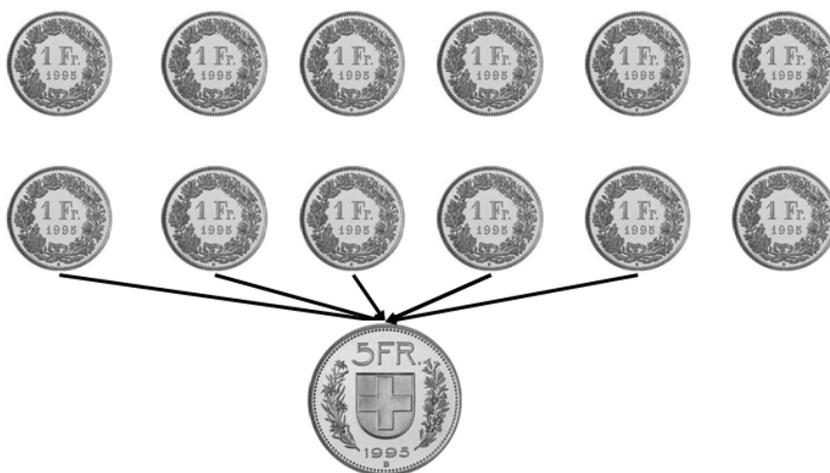


Abbildung 5 verdeutlicht, wie und welche Münzen umgetauscht werden sollen. In zusätzlichen Prüfungen könnten auch andere Fünfergruppen von Einfrankenstücken umgetauscht werden.

Abbildung 6

Anordnung der Invarianzprüfung mit dem Fünffrankenstück

Wenn die Anordnung gemäss der Abbildung 6 mittels der Wechseloperationen realisiert worden ist, stellt man dem Kind die folgenden möglichen Fragen. Dabei zeigt man mit dem Finger auf die angesprochenen Reihen.

„Hat es dasselbe bei den Geldstücken hier und hier?“

„Hat es gleichviel Geld hier und hier?“

„Oder hat es mehr?“

„Oder hat es irgendwo hier und hier weniger?“

„Wie kommst du darauf?“

Methodische Differenzierungen beim Experiment mit dem Fünffrankenstück

Das flexible Interview lädt dazu ein, dass die Versuchsleiterin oder das Kind die Auseinandersetzung mit dem Gegenstand des Experiments differenzieren und erweitern können. Es gehört zum Grundprinzip, dass der Dialog und die Kooperation im Zentrum stehen. Die Arbeit verläuft günstig, wenn das Kind produktiv wird und man als Versuchsleiterin den Eindruck bekommt, man könne von Beobachtungen und Gedanken des Kindes ausgehend den Verlauf des flexiblen Interviews weiter gestalten. Wenn man das Gefühl bekommt, man müsse einen Untersuchungsverlauf erzwingen, ist es lohnenswert, wenn man kurz die Beobachtungen und Wahrnehmungen reflektiert und mit dem Kind bespricht.

Nehmen wir an, dass das Kind noch nicht mit den Fünffrankenstück operieren kann, indem es dieses z.B. als fünf abzählende Einfrankenstücke auffasst und sagt, dass in der Reihe mit dem Fünfliber nach der Wechseloperation nur noch zwei Geldstücke sind, also weniger als zuvor, als noch 6 Einfränkler da lagen. Es könnte auch sein, dass das Kind während den Wechseloperationen Einwände macht, dass nun die Menge des Geldes in einer Reihe verändert worden sei. In diesen Fällen soll man das Kind auffordern, mit den Münzen zu zeigen, was es meint. Man könnte ihm auch sagen, es soll die Reihen so bestücken, dass sie beide gleichviel Geld hätten.

Auch in diesem Experiment ist die Frage zu prüfen, ob das Kind den Unterschied zwischen Anzahl von Münzen und der Menge des Geldes (des Geldwertes) als abstrakte Zahl differenzieren und koordinieren kann. Oder anders formuliert: das Experiment differenziert zwischen der Invarianz von Anzahlen von Münzen und der Invarianz von Geldwerten. Beim Experiment mit den Einfränkern, siehe Abschnitt 6.3, konnte nur die Unabhängigkeit des Wertes von der Anordnung der Münzen geprüft werden.

Der kardinale Wert und Begriff einer Zahl kann mathematisch gesprochen in unendlich vielen Zahlen und Beziehungen zwischen den Zahlen und in vielfältigsten Formen zur Sprache gebracht werden. Die Münzen oder die Banknoten symbolisieren diese Zahlen. Der Fünfliber wird zum anschaulich gemachten Argument der Kraft der Fünf. Bei den Ausführungen und Beispielen von Wittmann & Müller (1990) erschien die Kraft der Fünf als Schema, das über einer Menge von fünf einzelnen Wendeplättchen (auf dem Zwanzigerfeld oder der Zwanzigerreihe) gebildet werden kann. (Im Euroraum müsste dies mit dem 5€-Geldschein geprüft werden.) Nimmt man den Aspekt der Kaufkraft des Geldes hinzu, so tritt die Klarheit der Arithmetik in Verbindung mit den Gesetzen des Marktes, es entsteht eine neue Dynamik.

Um sicher zu gehen, ob das Kind die Äquivalenz der beiden Münzenreihen erkennt, kann man die Reihen nach der Auseinandersetzung mit der standardisierten Variante in zusätzlichen Darstellungen vorlegen. Das können Haufen oder vertikal ausgerichtete Reihen sein. Weiter kann man das Kind bitten, andere Einfränker in Fünfliber zu wechseln.

Wie gesagt nannten Inhelder, Sinclair & Bovet (1974) die Erweiterung und Differenzierung der vordefinierten Aufgabe die Gegen-Überprüfung. Sie ist einer der bedeutsamsten Aspekte der Forschungsmethode der Genfer Schule. Man vertieft die Kenntnis über eine Fähigkeit, indem man diese Fähigkeit gleich von verschiedenen Seiten experimentell überprüft. Das ist die „**vérification sur le vif**“. Man gibt sich nicht übereilt mit einer Antwort des Kindes zufrieden, sondern man sondiert weiter oder man lässt das Kind Darstellungs- und Erklärungsversuche herstellen, indem man es auffordert: Was kannst du mir noch zeigen mit diesem Geld? (Grundlegende Hinweise sind bereits beim klassischen Invarianzversuch erläutert worden.) Die flexiblen Interviews sind deshalb auch offene Aufgaben, weil man als Pädagogin oder als Psychologe das mehrperspektivische Prüfen von Fragen frei und flexibel arrangieren kann. Dazu gehört z.B. auch, dass man dem Kind Wendeplättchen und das Zwanzigerfeld vorlegt.

Interpretation der Antworten

Die Interpretation der Antworten erfolgt auch hier unter bewusstem Verzicht auf Altersangaben. Man kann das flexible Interview im Kindergarten ausprobieren, es kann aber auch sein, dass man das Interview mit älteren Kindern mit einer geistigen Behinderung macht. Im Zentrum stehen die Logik der Handlung und die Logik und der Inhalt der Erklärung des Kindes. Es lassen sich Gruppen oder Netzwerke von Argumenten und Handlungen unterscheiden. Diese werden qualitativ in drei Niveaus geordnet. Weitere Forschungen und weitere Übungen mit Kindern im Unterricht würden bestimmt sehr interessante Argumentationsgruppen eruieren helfen.

Noch keine Werterhaltung:

Um die zweite Ansammlung in beiden Situationen A und B (bzw. der Voraufgabe sowie dem Experiment) herzustellen, kann das Kind zum Zählen übergehen, oder es kann irgendeine figurale Aufstellung aufbauen, oder es führt eine globale Übereinstimmung aus, oder es geht in 1:1-Schritten (paarweise) vor. Das Kind kann den Unterschied zwischen der Anzahl der Münzen (hier mit den Einfrankenstücken und dort mit der gemischten Reihe bestehend aus einem Fünfliber und Einfränkern) und dem (Zahlen-) Wert des Geldes noch nicht herauschälen.

Die Urteile sind in beiden Situationen nicht werterhaltend. Das Kind koppelt den Wert an die Länge der Reihen oder gar an die Grösse der Münze. Es kann auch sein, dass es unten mittels des Subitizing zwar zwei Münzen erkennt, aber den Geldwert noch nicht bestimmen kann.

„Es hat oben mehr Geld, weil die Frankenstücke unten sehr nahe beieinander sind“, „Es hat oben mehr Geld, weil es 6 Fr. sind, unten hat es nur zwei oder so.“ etc. Weiter gehört dazu, dass sich das Kind durch die Grösse der Münze beeinflussen lässt und sagt: „Unten hat es mehr Geld.“

Die Frage nach der Menge der Münzen kann korrekt oder nicht korrekt gelöst werden.

Zwischenphase:

Die Ansammlungen werden durch eine korrekte 1:1 – Übereinstimmung hergestellt. Das heisst auch, dass die Wechseloperation $1\text{Fr.} + 1\text{Fr.} + 1\text{Fr.} + 1\text{Fr.} + 1\text{Fr.} \rightarrow 5\text{Fr.}$ beherrscht wird.

Die Fragen nach der Werterhaltung führen zu folgenden Verhaltensweisen:

- Das Urteil des Kindes ist in der einen Situation werterhaltend, in der andern Situation aber nicht;
- Widersprüche zwischen Wahrnehmung und Aussagen werden z.T. wahr genommen, können aber nicht aufgehoben werden;
- Es kann sein, dass man Verzögerungen oder Schwankungen im Urteil feststellt in jeder Situation: „Es hat oben mehr Franken ... nein unten...es ist dasselbe bei beiden...“ etc.

Die Antworten zur Werterhaltung werden nicht untermauert durch ausformulierte und vollständige Argumente. Die Anzahl der Frankenstücke bzw. die Anzahl der Münzen wird korrekt bestimmt, die Schlussfolgerung auf die Werterhaltung besteht aber in einem „Rateprozess“: „Es hat oben 6 Frankenstücke... dann errate ich auch unten 6 Franken.“ Die Wechseloperation kann noch nicht in eine Addition oder gar eine Multiplikation integriert werden.

Wertesicherung

Die verschiedenen Anordnungs-Situationen bieten Anlass zu stabilen Urteilen über die Wertesicherung. Das Kind weiss, dass die Menge des Geldes gleich bleibt, in diesem Fall 6 Fr. Das wird durch eines oder mehrere der folgenden Argumente gerechtfertigt:

- Argument der „Identität“: „Oben und unten hat es in beiden Reihen gleich viel Geld. Unten hat es zwar weniger Münzen (Geldstücke). Aber es sind gleichviele Franken, weil fünf Einfränkler in einen Fünfliber gewechselt worden sind.“ Unten hat man fünf Einfränkler weggenommen und an deren Stelle einen Fünfliber hingelegt. Es spielt keine Rolle, wie man die Münzen hinlegt. Es spielt keine Rolle, welche fünf Einfränkler man unten in einen Fünfliber wechselt. Wenn ich z.B. fünf und fünf zusammenzähle, so gibt es dasselbe wie wenn ich $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$ zusammen zähle (das Kind argumentiert mit der Kraft der Fünf).“
- Argument der „Reversibilität“: „Man könnte auch die andere Reihe oben wechseln, genau gleich wie die Untere. Man könnte die Münzen schön zueinander legen, dann sähe man, dass immer ein Franken zu einem Franken kommt, bei Fünfliber würden fünf Einfränkler hinzu gelegt. So sieht man am Schluss, dass es gleichviel sein muss. Es hat in keiner Reihe mehr Geld.“
- Argument der „Kompensation“. Dieses ähnelt zum Teil Argumenten der Reversibilität, siehe oben: „Die Zwischenräume zwischen den Münzen können verschieden sein, die Länge der Münzenreihen ist dann auch verschieden. Wenn man aber das Geld richtig zählt, sieht man immer wieder, dass es gleichviel ist.“ Oder: Die Abstände zwischen den Münzen sind verschieden oder gleich, der Fünfliber ist wie fünf Einfränkler, darum ist bleibt es gleichviel Geld.

Wenn das Experiment abgeschlossen ist, kann man u.U. das Experiment mit den Geldscheinen oder mit dem Fünzigrappenstück machen.