HfH
Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik Zürich

Zum Verständnis der Proportionen im Rahmen des Experiments mit den drei Fischen

Theoretische und methodische Erörterung zur Erforschung des proportionalen Denkens mit Hilfe des flexiblen Interviews.

Stefan Meyer, Dozent HfH

Zürich, Juni 2010

Inhalt

Vorbemerkung

Dieser Reader fasst in vorläufiger Form zwei Arbeiten zusammen. Die Initiative ging aus von Regula Müller, SHP, ehem. Studentin der HfH, welche im Rahmen des Moduls B5 Kognition 2005 mit einer Schülerin Experimente zum Verständnis der Proportionen durchführte. Ihr gebührt ein herzliches Dankeschön.

Es existiert ein ausführlicherer Reader zum Thema. Die Arbeiten dienten als Grundlage für die Entwicklung der IDS (Grob, Meyer und Hagmann, 2009).

Theoretischer Rahmen

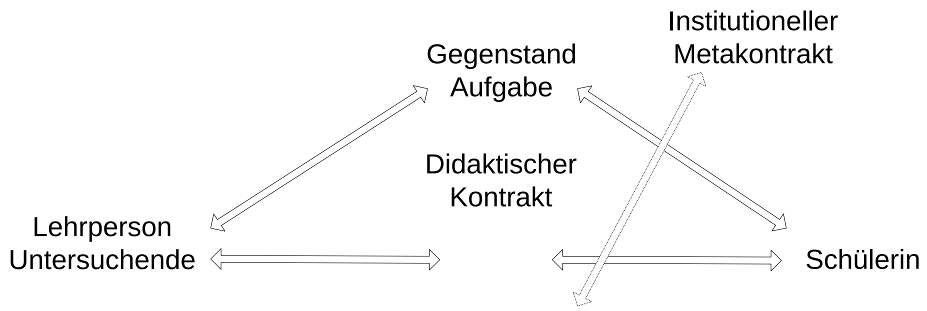
Piaget et al. (1977) und Montada (1998) beschrieben Strukturen, welche dem Verständnis von Proportionen vorangehen. So konnte gezeigt werden, dass eine Struktur in gewissem Sinn eine seriale Korrespondenz herstellt, welche den wachsenden Abständen entspricht. Das geschieht zwischen dem Abstand zwischen dem Element E und dessen ursprünglichen Punkt in einer Folge I, welche in dem Mass grösser wird, in welchem der Abstand zwischen dem Element E' und dem Ursprungspunkt der Folge II wächst. Am Anfang tendiert das Kind bloss dazu, dass es dasselbe Anwachsen der Abstände von der Folge I auf die Folge II überträgt. Das Kind kann noch keinen Bezug herstellen zwischen der regulären Variation in der Folge I und der differentiellen Progression in der Folge II. Diese Kovariation tendiert zur Proportionalität hin.

Singer, Kohn, und Resnick (1997) differenzierten die Beschreibungen der Grundstrukturen von Piaget et. al. (1977). Sie wollten wissen, wie sich vorgängig oder parallel zur Entwicklung der exakten Zahlbegriffe ungefähre, sogenannte protoquantitative, Kompetenzen bildeten. Unter protoquantitativen Urteilen oder protoquantitativem Denken fassten sie all das zusammen, was Kinder unter Länge und Breite, Zeit, Geschwindigkeit, Distanz, Dichte, Grösse von Tieren und Futterbedarf, usf. verstehen, ohne dass sie Zahlen oder Masse zu verwenden brauchten. Die Schätzurteile der Kinder waren insgesamt nahe den mathematisch korrekten Verhältnissen. Sie berichteten von Experimenten, in denen sich die Grösse der Fische einmal linear unterschied, das andere Mal geometrisch (= konstantes Verhältnis). Um herauszufinden, wie sich das protoquantitative Denken der Kinder entwickelte, wurden den Kindern keine quantitativen Anker gegeben. Sie sollten den Fischen gerade die richtige Menge Futter geben, nicht zuviel und nicht zuwenig. Praktisch alle Kinder von der ersten Klasse an konnten diese Aufgabe richtig lösen. Sie verteilten das Futter mehr oder weniger proportional zur Länge der Fische. Um herauszufinden, ob die Kinder die Längenverhältnisse zwischen den Fischen erfassen konnten und in Beziehung setzten zur Futtermenge, wurde ein weiteres Experiment durchgeführt. Singer, Kohn, und Resnick (1997) legten, ohne die Anzahl oder die Längenverhältnisse zu bezeichnen, Futter zu einem Fisch in der Folge hin. Ausgehend von diesen Informationen sollten die Kinder herausfinden, wie viel die andern Fische kriegten. Lineare Strategien, d.i. das Setzen gleicher Differenzen, wurden von 37% der Kindergartenkinder, von 44% der Erstklässler und erst in der fünften Primarklasse von 75% der Kinder gelöst. Die geometrischen Strategien bereiteten in allen unteren Klassen grosse Schwierigkeiten, die Fünftklässler lösten sie zu 56%, die Erwachsenen zu 75%. Die erstaunlich guten Leistungen in der ankerfreien ersten Aufgabe stehen in deutlichem Gegensatz zu den Aufgaben mit numerischen Ankern. Die Autoren folgern, dass die Versuchspersonen im protoquantitativen Denken vermutlich keine Überlegungen über das Verhältnis zwischen den Fischen innerhalb der Folgen anstellen, sondern dass sie einen direkten Link zwischen Fisch und Futter herstellen. Weiter kommen sie zum Schluss, dass die Links eher auf der Wahrnehmung von Dichte beruhen als auf numerischen Überlegungen.

Diese Untersuchungen konzentrierten sich auf einen Gegenstand der kognitiven Entwicklungspsychologie. Die folgende Erörterung des Kontextes arbeitet wesentliche Elemente der sozialen und institutionellen Verhältnisse heraus, welche nach Schubauer-Leoni und Perret-Clermont (1997) der Komplexität dieser Problemlösesituation gerechter werden als eine ausschliessliche kognitivistisch-strukturalistische Sichtweise. Das flexible Interview wird als trianguläre Struktur aufgefasst, siehe Abbildung 1.

Abbildung 1

Die förderdiagnostische Untersuchung im Licht der institutionellen und didaktischen Kontrakte



Dieses tripolare Modell der Konstruktion von Wissen besteht aus einem Lerngegenstand und zwei Akteurinnen, der Schülerin und der Heilpädagogin. Der implizite didaktische Kontrakt wird als wechselseitiges System von spezifischen Erwartungen im Mathematikunterricht definiert (Brousseau, 1988; Chevallard,1988 zitiert nach Schubauer-Leoni und Perret-Clermont (1997). Die Autorinnen differenzieren zwischen der pädagogischen Ebene und der Forschungsebene (experimental contract). Im Setting dieses Experiments wirkte die Lehrkraft auch als Untersuchende, welche im Rahmen des Leistungsnachweises des Moduls, Kognition, eine Praxisübung vorbereitete und durchführte. Das flexible Interview sollte die Studierenden (Lehrpersonen) darin sensibilisieren und professionalisieren, dass sie lernten, die belehrenden Interventionen sowie die summativen Beurteilungen zugunsten formativer und operativer Verhaltensweisen im Sinn einer dynamischen Förderdiagnostik zu erforschen und zu verändern. Am Anfang fällt der Veränderungswiderstand dadurch auf, dass hilflose Schüler dazu tendieren, von der Lehrkraft Belehrungen anzufordern. Dies wäre ein Indiz für einen traditionellen didaktischen Kontrakt. Die Kehrseite des impliziten didaktischen Kontraktes könnte sich darin zeigen, dass die Lehrperson Angst bekommt, wenn sie auf die Belehrung verzichten soll, oder wenn sie sich auf das weite Feld der Entwicklung des Denkens einlässt. Eine Eigenschaft des flexiblen Interviews ist die, dass die Untersuchende möglichst auf Suggestion verzichtet, damit die Denk- und Lösungswege des Gegenübers frei und eigenständig erwirkt werden können. Dies basiert auf den Erfahrungen der Genfer Schule und weiterführender Projekte (Kamii, 1985). Ihnen war gemeinsam, dass die didaktischen Kontrakte expliziter und operativer wurden. Schubauer-Leoni und Perret-Clermont (1997) fassen Untersuchungen zusammen, nach denen die Veränderung des Settings beim Lösen und Beschreiben eines Rechenproblems wesentlich andere Verhaltensweisen erzeugte. So zeichneten die Schüler im Klassenzimmer im Beisein der Lehrkraft die Lösungen auf traditionellere Weise auf als in der Zweiersituation ausserhalb des Klassenzimmers mit einer unbekannten Forscherin. In dieser Situation wurde die Umgangsprache und das Zeichnen häufiger eingesetzt für das Lösen des mathematischen Problems. Mit Blick auf die Abbildung 1 kann der Schluss gezogen werden, dass die Durchführung einer Problemlösung zum Verständnis von Proportionen neues Licht auf alle Aspekte der didaktischen Kontrakte und der institutionellen Metakontrakte werfen kann. Es ist jedoch nicht möglich, das Stigma der Kleinklassenschülerin zu überwinden, solange sie getrennt von den Kameradinnen der Regelklasse arbeiten muss. So oder so lohnt es sich, das Selbstbild, die Rollen und die Verhaltensweisen der Beteiligten zu erhellen und zu differenzieren. In dieser Untersuchung konzentrierten wir uns auf die Verhaltensweisen in der Auseinandersetzung mit den Proportionen.

Theoretische Überlegungen zum Experiment von Piaget

Das Experiment von Piaget et al. (1977) arbeitete mit einer linearen Längenfolge der Fischmodelle und mit quantitativen Ankern (d.i. die Angabe der Verhältnisregeln für die Fütterung der Fische). Die Versuchsleitung informierte über das Bildungsgesetz der Folge. Die Versuchspersonen sollten die Folge der Fische auf die Folge des Futters abbilden. Piaget et. al. (1977) konnten bei diesem Versuch vier Stadien unterscheiden.

I. **Stadium: Qualitativer Zusammenhang (fünf bis sechs Jahre):** Erkennen irgendeines qualitativen Zusammenhangs. Das Kind arbeitet mit den Kriterien „mehr“, „weniger“. Die Lösung muss folgendermaßen aussehen: Fisch B muss mehr bekommen als A und Fisch C muss mehr bekommen als B. Die Anzahl der Futterperlen stellt nur Symbole dieser nicht quantifizierten Ordnungsrelation dar.

II. **Stadium: Ordinaler Zusammenhang (sechs bis sieben Jahre):** Numerische Quantifikation. Die Lösungen sind dann die ganzzahligen Folgen 1,2,3 oder 3,4,5. Durch wiederholte Addition der Einheit 1 versucht das Kind , die qualitative Reihenfolge A, B, C zu quantifizieren, dies ergibt doch nur einen ordinalen Zusammenhang (mehr, gleich, weniger = numerische Quantifikation)

III. **Stadium: Hyperordiale Folge (sieben bis acht Jahre):** Es entsteht eine „hyperordinale“ Folge (5, 7, 9…). Die Futterunterschiede sind > 1, verglichen mit Stadium II. Das Kind hat erkannt, dass die Unterschiede zwischen A-B und B-C gleich sein sollen. Es stellt somit eine numerische Äquivalenz her, aber auf der Basis gleicher Differenzen („zwei mehr“), noch nicht auf der Basis proportionaler Verhältnisse.

IV. Stadium A (ab acht bis neun Jahren): Lösung im Sinne der Proportionalität kann ihm gelingen (4= 2 x 2). Das Kind erkennt die korrekte Beziehung erst zwischen den Fischen AB oder BC. „B frisst zwei Mal mehr als A“, andere Relationen können noch instabil sein.

IV. Stadium B (ab acht bis neun Jahren): Lösung im Sinne der Proportionalität gelingt (2,4,6), (3,6,9). Das Kind erkennt beide Relationen AB, BC korrekt. „B frisst doppelt so viel wie A, 4 durch 2 gibt 2, C frisst dreimal so viel wie A, 3 mal 2 sind 6 Bohnen.“ Die Verhältnisse sind konstant.

Nach Piaget et al. (1977, S. 45) gibt es zuerst eine intensive Quantifikation (Seriation, d.h. Ordnungsrelation ohne Quantifizierung der Abstände). Dies wird auch als protoquantitatives Denken bezeichnet. Später gelingt dem Kind die extensive Quantifikation (im Sinne gleicher Differenzen). Zum Schluss kommt es zur proportionalen Quantifikation. Durch die korrekte Abbildung kann gezeigt werden, dass das Bildungsgesetz vollständig erfasst worden ist.

Tabelle 1

Ausschnitt der Resultate zur Fischfütterung (Piaget et al., 1977, S. 45)

	Niveau					Σ Alter
	I	II	III	IV A	IV B	
5 Jahre	5	1	3	0	0	9
6 Jahre	3	1	1	1	0	6
7 Jahre	1	2	3	1	0	7
8 Jahre	0	2	0	2	3	7
9 Jahre	0	0	0	0	5	5
Σ Niveau	9	6	7	4	8	34

Tabelle 1 zeigt die Verteilung der richtigen Antworten im Experiment der Fischfütterung. Die Autoren bemerkten, dass es sich bei dieser Stichprobe um Kinder einer internationalen Schule in Genf handelte, welche ein entschieden höheres intellektuelles Niveau aufwiesen, als man es in Volkschulen anzutreffen gewohnt war. Die Zahlen wurden vom Mitautor mit dem ALMO-Statistik-System 8.5 (Holm, 2005) nachgerechnet: X^2 (16, N =34) = 36.86, p = < .05. Dem Haldane-Dawson-Test (einseitiger Test) zufolge besteht ein signifikanter Zusammenhang zwischen dem Alter der Kinder und dem Niveau des proportionalen Denkens. Die Stärke des Zusammenhangs war mittelgross und betrug nach Kendalls τ (tau-b) = 0.62, p = < .05.

Die theoretischen Ausführungen lassen sich in der Tabelle 2 zu einer vorläufigen Synthese zusammenfassen. In den Spalten auf der linken Seite wurden die Erweiterungen durch Singer, Kohn, und Resnick (1997) eingearbeitet. Es lässt sich eine Entwicklungslinie skizzieren, welche von den protoquantitativen über die additiven bis hin zu den multiplikativen Argumenten verläuft. Psychologisch gesehen ist es durchaus möglich, dass jemand bei der Problemlösung von verschiedenen Argumenten Gebrauch macht, bis die Bildungsgesetze erfasst und die Folgen korrekt abgebildet sind. In den Protokollen der flexiblen Interviews sollte ersichtlich sein, wie sich Gedanken und Handlungen gegenseitig beeinflussen. Die Zellen in der rechten Spalte stellen in konzentrierter Weise die Qualitätsstufen nach Piaget et al. (1977) dar. Im Stadium I sind die protoquantitativen Argumente und Handlungen ausschlaggebend. Im Stadium II werden mittels additiven Operationen einfache Zusammenhänge zwischen den Folgen hergestellt. Im Stadium II bildet Kind durch Addition von Differenzen grösser/gleich zwei ein hyperordinales Beziehungsgesetz. Das Stadium IV ist unterteilt. In IV A wird das multiplikative Beziehungsgesetz zum Teil rekonstruiert, indem das Kind über Regeln wie „zwei Mal mehr oder zwei Mal weniger“ Teile der Folgen richtig abbilden kann. Im Stadium IV B ist das Beziehungsgesetz vollständig erfasst. Das Kind verteilt die Futtermenge mit Hilfe der multiplikativen Gesetze auf alle Folgenglieder korrekt.

Tabelle 2

Entwicklung des Verständnisses für Proportionen

<table>
<tr><td>Protoquantitative Argumente</td><td rowspan="2">Additives Argumentieren</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="3">Arithmetische Folglen (konstante Differenzen)</td><td>Stadium I Qualitativer Zusammenhang
Die Argumente bestehen aus den Begriffen „mehr, weniger“ (im Sinn von Ur-Anzahlen). Von Piaget als intensive Quantifikation bezeichnet.
Die Anzahl der Futterperlen sind erst Symbole</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Quantitative Argumente</td><td>Stadium II Ordinaler Zusammenhang
„Mehr, gleich, weniger“
Wiederholte Additionen, meistens um + / - 1
Urverhältnisse werden gebildet aus 1 mehr oder weniger</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Multiplikatives Argumentieren</td><td rowspan="3">Geometrische Folgen (konstante Verhältnisse)</td><td>Stadium III Hyperordinaler Zusammenhang
Die Differenzen sind gleich, „zwei mehr...“ Die Argumente sind additiv.
Urverhältnisse werden fortgebildet aus ≥ 2 (mehr, weniger)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Verhältnis-Argumente</td><td rowspan="2"></td><td>Stadium IV A Ansätze von Proportionalität
„6 = 2 x 3", erst teilweise korrektes Erfassen der Folge.</td></tr>
<tr><td>Stadium IV B Vollständige Proportionalität
Die ganze Folge wird erfasst und gelöst. Die Verhältnisse sind konstant.</td></tr>
</table>

In der Tabelle 2 wird die Entwicklungslinie der Einsicht in Verhältnisse gezeichnet. Sie baut sich auf von der protoquantitativen Verhältnisbildung im Stadium I zur proto-verhältnismässigen (im Stadium II und III) bis zur verhältnismässigen Folgenbildung im Stadium IV.

Weitere Untersuchungen zu Proportionalität und Ausblick

Ricco (1982) gab französischen Grundschülern der Klassen CE1 (2. Primarstufe, 7. Altersjahr) bis CM2 (5. Primarstufe, Alter 10 Jahre) Aufgaben, in denen sie zu tabellarisch dargestellten Folgen von Füllfedern die Folgen der Preise abbilden sollten. Zweitklässler stellten in der Regel protoquantitative Überlegungen an. Von der dritten Klasse an argumentierten die Schüler im Sinn der proto-verhältnismässigen Denkweise, d.h. sie suchten nach konstanten Differenzen zwischen der Anzahl der Bleistifte und der Höhe der Preise. Von der vierten Klasse an wurden Lösungen im Sinn der verhältnismässigen Denkweise gezeigt. Die Autorin verwendete ähnliche Kategorien wie Piaget et al. (1977). Ihre Stichprobe (N=40) setzte sich aus durchschnittlichen Schüler-populationen, je 10

Schüler pro Schulstufe zusammen. Die Resultate überschneiden sich mit denjenigen von Piaget et al. (1977).

Singer, Kohn, und Resnick (1997) fassen zusammen, dass es für das Verständnis von Proportionen unabdingbar ist, dass das additive Denken zugunsten des multiplikativen überwunden werden kann, und dass sich die Personen innerhalb von und über Skalen von Masszahlen hinaus bewegen können.

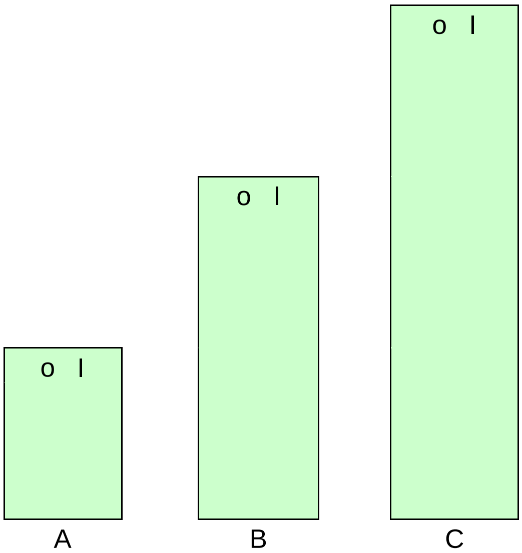
Es ist damit zu rechnen, dass sich Personen mit kognitiven Entwicklungsrückständen sowohl im Niveau als auch in der Stabilität der Argumentation von Menschen mit durchschnittlichen Entwicklungsverläufen unterscheiden. Dieser doppelte Unterschied wurde von Inhelder (1963) „pathologische Ozillation“ genannt.

Die Experimente

Im Folgenden werden die Durchführung und die Auswertung von drei verschiedenen flexiblen Interviews beschrieben.

Verständnis für Proportionen im Rahmen des Experiments mit den drei Fischen, die mit Bohnen gefüttert werden, die lineare Serie 2 – 4 – 6.

Wie der Test gedacht ist: Dem Kind wurden 3 Holzstücke A, B, C von 5cm, 10cm und 15cm Länge vorgelegt (Piaget et al., 1977). Die Buchstaben dienen der Versuchleiterin als Abkürzungen. Den Kindern stellt man die Fische als den kleinen, den mittleren und den grossen vor. Es wurde ihm erklärt, dass die Holzstücke Fische darstellen. Man erklärt ihm, dass diese Holzstücke Fische darstellen und dass es diese füttern soll. Als „Futter“ dienen Perlen. Kichererbsen eignen sich gut. Bei Kindern mit feinmotorischen Schwierigkeiten sollten grössere Bohnen genommen werden. Man erklärt ihm danach, dass der Fisch von 10cm doppelt so viel frisst wie der Fisch von 5cm und dass der Fisch von 15cm dreimal so viel frisst wie der 5cm grosse. Man stellt dem Kind dann folgende Fragen;
Wie viel Futter sollen wir dem Fisch A und C geben, wenn wir wissen, dass der Fisch B 4 Perlen frisst?



Ablauf und Instruktion:

„Ich möchte, dass du bitte folgendes machst: Du sollst die Fische mit Bohnen füttern. Der mittlere Fisch bekommt 4 Bohnen. Der mittlere (10cm lange) Fisch frisst doppelt so viel wie der kleine (5cm lange) Fisch. Der große (15cm lange) Fisch frisst 3mal so viel, wie der kleine Fisch.

Wenn das Kind erkannt hat, dass A weniger als B und B weniger als C frisst, erwähnt der Versuchsleiter nochmals, dass B doppelt so viel frisst wie A und dass C drei mal soviel frisst wie A. Wenn das Kind nicht weiss, was „doppelt so viel“ bedeutet und es auch fragt, sollte man zuerst durch Gegenfragen erkunden, was es sich unter diesem Begriff vorstellt: „Was heisst „doppelt“ deiner Meinung nach?“ „Kannst du es mit Bohnen zeigen, was doppelt bedeutet (heisst)?“ Wenn einfach gelegt wird, so muss man das nicht extra problematisieren in der Testsituation. Notiere die Fragen und die Antworten.

Durchführungszeit ca. 1 Minute.

Vier Niveaus des Verständnisses für Proportionen
I. Stadium: Qualitativer Zusammenhang: Stadium (fünf bis sechs Jahre) : Erkennen irgendeines qualitativen Zusammenhangs. Das Kind arbeitet mit den Kriterien „mehr“, „weniger“. Die Lösung muss folgendermaßen aussehen: Fisch B muss mehr bekommen als A und Fisch C muss mehr bekommen als B. Die Anzahl der Futterperlen stellt nur Symbole dieser nicht quantifizierten Ordnungsrelation dar.
II. **Stadium: Ordinaler Zusammenhang:** Stadium (sechs bis sieben Jahre): Numerische Quantifikation. Die Lösungen sind dann die ganzzahligen Reihen 1,2,3 oder 3,4,5. Durch wiederholte Addition der Einheit 1 versucht das Kind , die qualitative Reihenfolge A, B, C zu quantifizieren, dies ergibt doch nur einen ordinalen Zusammenhang (mehr, gleich, weniger = numerische Quantifikation)

III.	**Stadium: Hyperordiale Folge (sieben bis acht Jahre):** Es entsteht eine „hyperordinale"Reihe (5, 7, 9…). Die Futterunterschiede sind > 1, im Vergleich zu Stadium II. Das Kind hat erkannt, dass die Unterschiede zwischen A-B und B-C gleich sein sollen. Es stellt somit eine numerische Äquivalenz her, aber auf der Basis gleicher Differenzen („zwei mehr"), noch nicht auf der Basis proportionaler Verhältnisse. Hier sind alle additiven Lösungen zuzuordnen. 4 = 2 + 2.
IV. Stadium A	**(ab acht bis neun Jahren):** Lösung im Sinne der Proportionalität kann ihm gelingen (4= 2 x 2). A. Das Kind erkennt erst die korrekte Beziehung zwischen den Fischen AB oder BC. „B frisst zwei Mal mehr als A", andere Relationen können noch instabil sein.
IV. Stadium B	**(ab acht bis neun Jahren):** Lösung im Sinne der Proportionalität gelingt (2,4,6). B. Das Kinder erkennt beide Relationen AB, BC korrekt. „B frisst doppelt so viel wie A, 4 durch 2 gibt 2, C frisst dreimal so viel wie A, 3 mal 2 sind 6 Bohnen."

Zuerst gibt es eine intensive Quantifikation (Seriation, d.h. Ordnungsrelation ohne Quantifizierung der Abstände). Später gelingt ihm die extensive Quantifikation (im Sinne gleicher Differenzen). Zum Schluss kommt es zur proportionalen Quantifikation.

Verständnis für Proportionen im Rahmen des Experiments mit den drei Fischen, die mit Bohnen gefüttert werden. Die lineare Serie 3-6-9.

Gleiches Setting wie bei Aufgabe 2-4-6. Die Ausgangslage besteht hier in der Information, dass der grösste Fisch 9 Erbsen (Bohnen) bekommt.

„Wie viel Futter sollen wir dem kleinen und dem mittleren Fisch geben, wenn wir wissen, dass der grosse Fisch 9 Erbsen frisst?"

Ablauf und Instruktion:

„Ich möchte, dass du bitte folgendes machst: Du sollst die Fische wieder mit Erbsen füttern. Der große (15cm lange) Fisch frisst bekommt 9 Erbsen. Wie viele bekommt A (5cm) und B (10cm)? B frisst zwei Mal soviel wie A, und C frisst drei Mal soviel wie A., der kleine Fisch.

Wenn das Kind erkannt hat, dass A weniger als B und B weniger als C frisst, erwähnt der Versuchsleiter nochmals, dass B doppelt so viel frisst wie A und dass C dreimal soviel frisst wie A. Wenn das Kind nicht weiss, was „doppelt so viel" bedeutet und es auch fragt, sollte man zuerst durch Gegenfragen erkunden, was es sich unter diesem Begriff vorstellt: „Was heisst „doppelt" deiner Meinung nach?" „Kannst du es mit Bohnen zeigen, was doppelt bedeutet (heisst)?" Wenn einfach gelegt wird, so muss man das nicht extra problematisieren in der Testsituation. Fragen und Antworten notieren.

Durchführungszeit ca. 1 Minute.

Vier Niveaus des Verständnisses für Proportionen
I. Stadium: Qualitativer Zusammenhang: Stadium (Kindergarten) : Erkennen irgendeines qualitativen Zusammenhangs. Das Kind arbeitet mit den Kriterien „mehr“, „weniger“. Die Lösung muss folgendermaßen aussehen: Fisch B muss mehr bekommen als A und Fisch C muss mehr bekommen als B. Die Anzahl der Futterperlen stellt nur Symbole dieser nicht quantifizierten Ordnungsrelation dar.
II. Stadium: Ordinaler Zusammenhang: Stadium (6-7 Jahre): Numerische Quantifikation. Die Lösungen sind dann die ganzzahligen Folgen 1,2,3 oder 3,4,5 oder 7,8,9. Durch wiederholte Addition der Einheit 1 versucht das Kind , die qualitative Reihenfolge A, B, C zu quantifizieren, dies ergibt doch nur einen ordinalen Zusammenhang (mehr, gleich, weniger = numerische Quantifikation)
III. Stadium: Hyperordiale Folge (8-9 Jahre) : Es entsteht eine „hyperordinale“ Folge (5, 7, 9 oder 3, 7, 9). Die Futterunterschiede sind >1, im Vergleich zu Stadium II. Das Kind hat z.T. erkannt, dass die Unterschiede zwischen A-B und B-C gleich sein sollen. Es stellt somit eine numerische Äquivalenz her, aber auf der Basis gleicher Differenzen („zwei mehr“), noch nicht auf der Basis proportionaler Verhältnisse. Hier sind alle additiven Lösungen zuzuordnen. 3 + 3 + 3 = 9.
IV. Stadium A (10-11 Jahre): Lösung im Sinne der Proportionalität kann ihm gelingen (6= 2 x 3). A. Das Kind erkennt erst die korrekte Beziehung zwischen den Fischen AB oder BC. „B frisst zwei Mal mehr als A“, andere Relationen können noch instabil sein.
IV. Stadium B (Erwachsene): Lösung im Sinne der Proportionalität gelingt (3, 6, 9). B. Das Kinder erkennt beide Relationen AB, BC korrekt. „C frisst drei Mal soviel wie A, 9 durch 3 gibt 3, B frisst doppelt soviel wie A, gibt 6 Erbsen.“

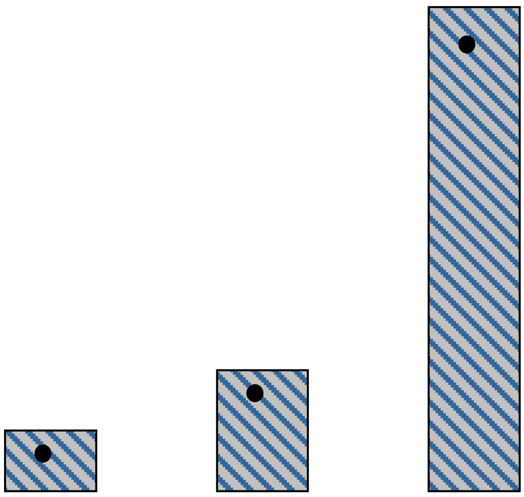
Verständnis für Proportionen im Rahmen des Experiments mit den drei Fischen, die mit Bohnen gefüttert werden. Die Längen der Fische stehen im Verhältnis der Zweierpotenz zueinander.

Das Zahlenbeispiel ist: 2 – 4 – 16 ($x \rightarrow^2 y \rightarrow^2 z$). Die Kinder müssen das Bildungsgesetz „Zweierpotenz" verstehen können und durch die Zahl der Erbsen abbilden. Sie werden informiert, dass das zweite Glied, der Fisch B, vier Erbsen bekommt.

Ähnliches Setting wie bei den Aufgaben 2-4-6, 3-6-9. Die Ausgangslage besteht hier in der Information, dass der mittlere Fisch 4 Erbsen (Bohnen) bekommt.

Ablauf und Instruktion:
„Ich möchte, dass du bitte folgendes machst: Du sollst die Fische wieder mit Erbsen füttern. Der mittlere Fisch bekommt 4 Erbsen. Wie viele bekommt der Kleine und der Grosse, wenn der Mittlere im Quadrat soviel bekommt wie A, und C im Quadrat soviel bekommt wie B?"

Wenn das Kind erkannt hat, dass A weniger als B und B weniger als C frisst, erwähnt der Versuchsleiter nochmals, dass B im Quadrat soviel bekommt wie A, und C im Quadrat soviel bekommt wie B?"
Wenn das Kind nicht weiss, was „im Quadrat" bedeutet und es auch fragt, sollte man zuerst durch Gegenfragen erkunden, was es sich unter diesem Begriff vorstellt: „Was heisst „im Quadrat" deiner Meinung nach?" „Wo hast du schon von „Quadrat" gehört?" „Kannst du es mit Bohnen zeigen, was „im Quadrat" bedeutet (heisst)?" Wenn einfach gelegt wird, so muss man das nicht extra problematisieren in der Testsituation. Beachte, dass keine Suggestivfragen gestellt werden. Fragen und Antworten notieren.
Am Schluss sollten die Kinder das legen, was *sie* unter „im Quadrat" verstehen.



„Wie viel Futter sollen wir dem kleinen und dem grossen Fisch geben, wenn wir wissen, dass der mittlere Fisch 4 Erbsen frisst, das sind im Quadrat soviel wie der kleine. Und der Grosse frisst im Quadrat so viel wie der mittlere?"

Durchführungszeit ca. 1 Minute.

Vier Niveaus des Verständnisses für Proportionen	
I.	**Stadium: Qualitativer Zusammenhang:** Stadium (fünf bis sechs Jahre): Erkennen irgendeines qualitativen Zusammenhangs. Das Kind arbeitet mit den Kriterien „mehr", „weniger". Die Lösung muss folgendermaßen aussehen: Fisch B muss mehr bekommen als A und Fisch C muss mehr bekommen als B. Die Anzahl der Futterperlen stellt nur Symbole dieser nicht quantifizierten Ordnungsrelation dar.
II.	**Stadium: Ordinaler Zusammenhang:** Stadium (sechs bis sieben Jahre): Numerische Quantifikation. Die Lösungen sind dann die ganzzahligen Folgen 3,4,5 oder 4,5,6. Durch wiederholte Addition der Einheit 1 versucht das Kind , die qualitative Reihenfolge A, B, C zu quantifizieren, dies ergibt doch nur einen ordinalen Zusammenhang (mehr, gleich, weniger = numerische Quantifikation)
III.	**Stadium: Hyperordiale Folge (sieben bis acht Jahre) :** Es entsteht eine „hyperordinale" Folge (2, 4, 6 oder 1, 4, 7). Die Futterunterschiede sind >1, im Vergleich zu Stadium II. Das Kind hat z.T. erkannt, dass die Unterschiede zwischen A-B und B-C „gleich" sein sollen. Es stellt somit eine numerische Äquivalenz her, aber auf der Basis gleicher Differenzen („zwei mehr"), noch nicht auf der Basis proportionaler Verhältnisse. Hier sind alle additiven Lösungen zuzuordnen. 2 (+2), 4 (+2), 6, usf.
IV. Stadium A:	Lösung im Sinne der Proportionalität kann ihm gelingen (4= 2 x 2). Im Stadium A wird die Multiplikation eingesetzt. A. Das Kind erkennt erst die korrekte Beziehung zwischen den Fischen AB oder BC. „B frisst zwei Mal mehr als A", andere Relationen können noch instabil sein. So kann es die Beziehung zwischen den Fischen BC mit „4 mal 2 gibt 8" bezeichnen.
IV. Stadium B:	Lösung im Sinne der Proportionalität gelingt (2, 4,16). Das Bildungsgesetz der Zweierpotenz wird aus der Instruktion verstanden und korrekt aufgebaut. Das Kinder erkennt beide Relationen AB, BC korrekt. „C frisst im Quadrat soviel wie B", „4 mal 4 ist 16", „B frisst im Quadrat soviel wie A, gibt 2 Erbsen für A." Ein Hinweis für das vollkommene Verständnis für das Bildungsgesetz der Zweierpotenz kann ebenfalls beobachtet werden, wenn die Kinder die Umkehrvorschrift, die Quadratwurzel explizit oder implizit einsetzen.

Literatur

Grob, A., Meyer, C.S, Hagmann-von Arx, P. (2009). *Intelligence and Development Scales [Medienpaket] : IDS : Intelligenz- und Entwicklungsskalen für Kinder von 5-10 Jahren*. Bern: Huber.

Montada, L. (1998). Die geistige Entwicklung aus der Sicht Jean Piagets. In R. Oerter, L. Montada (Hrsg.), *Entwicklungspsychologie* (4. ed., S. 518-560). Weinheim: Beltz.

Piaget, J., Grize, J.-B., Szeminska, A., Bang, V. (1977). *Epistemology and Psychology of Functions*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Resnick, L. B., Singer, J.B. (1993). Protoquantitative Origins of Ratio Reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema, T.A. Romberg (Hrsg.), *Rational Numbers* (S. 107-130). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Singer, J. A., Kohn, A.S., Resnick, L.B. (1997). Knowing about proportions in different contexts. In T. Nunez, P. Bryant (Hrsg.), *Learning an teaching mathematics* (S. 115-132). Hove, East Sussex: Psychology Press Ltd.