HfH
Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik Zürich

Studiengang Schulische Heilpädagogik
D04 Sprache und Mathematik
PSS BBA 06-09

Zahlenstrahl und einfache Bruchzahlen

Explorationen zu einem flexiblen Interview zum Verständnis der Bruchzahlen, dargestellt mit einem linearen Modell, einem Ausschnitt des Zahlenstrahls
Die revidierte Version des flexiblen Interviews, ergänzt mit differenzierteren Interpretationsregeln.

Stefan Meyer, HfH

Version 02.01.2008

Einleitung

Kinder setzen sich auf unterschiedliche Weise mit den rationalen Zahlen auseinander. Das beginnt meistens vor dem offiziellen Lehrgang in der Schule, und es wird in der Alltagssprache abgebildet (Freudenthal, 1983). Brizuela (2006, S. 300) konnte zeigen, dass Kinder im Kindergarten und der ersten Klasse Brüche bereits schriftlich symbolisieren und Nuancen von Bedeutungen zum Ausdruck bringen können, siehe Tabelle II.

TABLE II

Distributions of children's answers relative to their grade level

Types of notations or meanings	Halves are little bits	Can order fractions in terms of their magnitude	Provide a conventional notation for fractions
Kindergarten	14% (1/7)	86% (6/7)	14% (1/7)
First grade	64% (9/14)	29% (4/14)	38% (5/13)

Fortsetzung 1 der Einleitung

Im Artikel von Stump (2003) werden verschiedene Typen der bildlichen und mengentheoretischen Darstellungsformen und deren Verwendung in der Mathematikdidaktik vorgestellt. Im Zentrum steht der Bezug zur realen Welt der Kinder (Kuchen, Mengen von Blumen oder logischen Blöcken).

Der Zahlenstrahl (auch als Zahlengerade, engl. number line, bezeichnet) als Darstellungsform wird in der fachdidaktischen Literatur breit erforscht und diskutiert (Bobis, 2007; Brizuela, 2006; Krauthausen & Scherer, 2004; Ludwig, 2004; Cramer et al., 2002). Im Vordergrund stehen die ganzen Zahlen, die Operationen wie Addition und die Subtraktion, sowie die lineare Darstellung des Einmaleins. Die Beschreibungen von didaktischen Hilfsmitteln (Dienes Blöcke, Plättchen, Modelle von Kuchendiagrammen) oder von Längenmassen nimmt breiten Raum ein. Dem Zahlenstrahl wird weniger Plattform gewährt.

Fortsetzung 2 der Einleitung

In unserer Explorationsstudie wird mit einem Ausschnitt eines teilweise strukturierten Zahlenstrahls gearbeitet.

Sie kombiniert Herausforderungen

-an die Kenntnisse der natürlichen und rationalen Zahlen,

-an die Regeln der linearen Darstellung, sowie

-an die Mächtigkeit von Zahlen, welche symbolisch dargestellt werden.

Die Studie bewegt sich im elementaren Bereich der Arithmetik und fordert die Kinder zu operativen, flexiblen Interviews heraus, indem sie Zahlenkarten herum schieben können.

Brizuela (2006) forderte, dass die symbolischen Darstellungen von Brüchen intensiver erforscht und im Unterricht als generative Teile integriert werden müssten. Das soll mit dieser Übung eingelöst werden im Sinn eines operativen Verständnisses von Zahlensymbolen.

Vorübung Zahlenstrahl

Instruktion:

VL. : „Zeichne einen Zahlenstrahl und erkläre mir, was er ist!“ (A4-Blatt und Bleistift bereit halten. Die Antworten des Kindes und die Fragen des VL notieren.

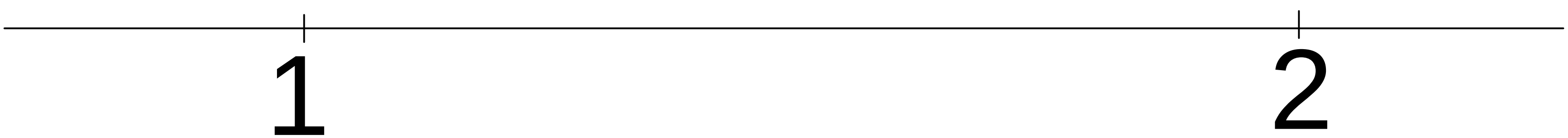
Wenn das Kind noch keinen Begriff davon hat, bietet man ihm abgestuft Hilfestellungen an. Lass das Kind nach der Hilfestellung mit einem leeren Blatt eine eigene Variante erstellen, kontrolliere und notiere, was es wie verstanden hat und erläutern kann.

H1) Einen Strich zeichnen (VL) und das Kind auffordern Zahlen einzutragen.
H2) Einen Zahlenstrahl zeichnen und die Zahlen 1 bis 3 eintragen, dann das Kind weiterfahren lassen bis zur Zahl 10 eintragen.
H3) Einen Zahlenstrahl zeichnen und die Zahlen bis zur Zahl 10 eintragen und mündlich erläutern (alles VL).

Danach wird die Testfrage gestellt.

Versuchsanlage

(die Kärtchen unterhalb des Ausschnittes des Zahlenstrahls immer in derselben Reihenfolge hinlegen)



0 $\frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$ 3 keine

Instruktion zum flexiblen Interview *„Zahlenstrahl und einfache Bruchzahlen“*

Instruktion:
VL. : Hier beim Zahlenstrahl ist die 1, da ist die 2.
Nun frage ich dich: Welche von diesen Kärtchen mit Zahlen passt *zwischen* die 1 und die 2 (mit dem Finger zwischen der 1 und der 2 hin- und her fahren)?

Ist es diese, diese... ? (mit dem Finger die Kärtchen der 0, ½ , 1 ½ , 3 zeigen) oder passt gar keine dazu, auf das „keine“-Kärtchen zeigen.
Wähle das aus, was deiner Meinung nach zwischen die 1 und die 2 gehört!“

Frage nach der Begründung (VL): „Erkläre mir, weshalb du diese Karte gewählt hast.“ (Wenn mehrere Karten gewählt werden, lässt man sie einzeln erklären. Notiere die Antworten und berücksichtige die Wahl bei der Interpretation.)

Testanlage:

1 2

0 $\frac{1}{2}$ $1\frac{1}{2}$ 3 keine

Kopiervorlage für die Zahlenkarten

0	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	3	keine

Protokoll der Beobachtungen, Interpretation der Beobachtungen und elektronische Kodierung der Daten

Notiere die freien Beobachtungen auf einem Blatt Papier.

Interpretiere die Antworten der Schülerinnen und Schüler mit Hilfe der Kategorien auf der Folie Nr. 10-13

Berechne das Alter des Kindes in Monaten.

Kategorien mit Beispielen für die Beurteilung der Antworten und der Handlungen, erweitert, 1 (die Zahlen in den Klammern beziehen sich auf die Nummern der Versuchspersonen in der Explorationsstudie).

Niveau 1:
Das Kind hat noch keinen Begriff des Zahlenstrahls. Die Hilfestellungen in der Vorübung können nicht aufgenommen und verstanden werden. Die Kärtchen werden ohne logisch-arithmetische Begründung hingelegt. Die Begründungen sind magischer oder rein ästhetischer Art. Dazu gehören auch Antworten wie „keine Zahl passt“; „alle Zahlen gehören zwischen die 1 und die 2“; „wenn 1 und 2 auseinander sind, dann ist oben die 1 und unten die 2“; „es hat gar keinen Platz für eine Zahl“. (13), (45), (48)
Als Begründung zeigt die Schülerin auf die 1 und die 2. (80)
Das Kind nimmt ½ sowie 1 1/2 , es sagt darauf, dass es keine Ahnung habe, weshalb diese beiden Karten zwischen 1 und 2 passen. (84)

Niveau 2:
Ganze Zahlen zählen. Das Kind zählt die ganzen Zahlen weiter und setzt die 3 zwischen die 1 und die 2. Es ordnet die Sachlage nach dem Schema der Seriation ganzer Zahlen. Es spricht von der Mitte, oder es vergleicht die Zahlen paarweise der Grösse nach. Vier Beispiele:
Weil‘s 3 chunnt do ane, nochem 2 und s 0 vorne." (Weil die 3 hierher kommt, nach der 2 und die 0 vorne.“)
Ein anderes Kind wählt zuerst die 3 und begründet: "wegen der Mitte" Nach dieser Aussage meint es: "Nein, die kommt da" (legt die 3 rechts neben die 2). Auf die Frage was nun zwischen die 1 und 2 komme, antwortet es: "Keine."
Das Additionsschema, das die ganzen Zahlen einbezieht, wird auch Niveau 2 zugeordnet: „Weil 1 + 2 3 gibt.“
Interessant sind folgende Überlegungen, bei denen die Antwort „Keine“ gewählt wird, aber mit einer Begründung, welche diesem Niveau zugeordnet werden kann: "Es passt KEINE hin. Weil 0 ist ja kleiner als 1 und 3 wäre grösser, drum passen die zwei Zahlen nicht. Man kann die 1 ja nicht in zwei Hälften schneiden." (57), (61), (64), (67)

Kategorien für die Beurteilung der Antworten und der Handlungen erweitert 2

Niveau 2a:
Zählen mit Bruchzahl(en), die nominal erfasst werden. Das Kind zählt die Zahlen weiter, es spricht von „passen" und / oder setzt die ½ oder die 1 ½ (oder sogar beide Bruchzahlen) zwischen die 1 und die 2. Das Verständnis der Bruchzahlen ist nominaler Art. Das heisst, dass die Bruchzahlen ohne Bezüge zur Quantität, oder zu Überlegungen über arithmetische Operationen wahrgenommen werden. *Das Zählschema wird zur Ordnung der Sachlage eingesetzt*. Es können auch Analogien zu Längenmassen auftauchen. Oder es werden grafische Korrespondenzen hergestellt, wie das erste Beispiel zeigt:
Das Kind wählt ½ und sagt: „Da hat es eine 1 und einen Strich und eine 2." (44)
Es werden praktische Beispiele erwähnt, mit denen die Bruchzahl exemplifiziert wird.
Kind nimmt nach langem Überlegen 1/2 und antwortet: „Ich hab einfach die genommen." Lehrperson: „Was verstehst du denn unter ½ ?" Kind: „Das ist die Hälfte, z.B. ein halber Kuchen."
„Wenn ich Kuchen backe, kann ich auch ‚1,2' machen." (Kind zeigt auf ½) (49)
Ein Beispiel mit Vergleich zu Längenmassen: Auf die Frage "Kannst du dir vorstellen was das ist?" meint er: "Wie ein Meter". (79)
Interessant ist auch diese Erklärung: „Können es 2 Kärtli sein? ½ ist immer dazwischen. Bei 1 ½ bin ich mir nicht sicher. 1 ½ ist mehr als 1. ½ ist weniger als 1. Ich würde ½ wegnehmen. Jetzt weiss ich nichts mehr." (82)
1 und 1 ½ gehört zusammen, dann kommt ½ , dann 2. (90)

Kategorien für die Beurteilung der Antworten und der Handlungen erweitert 3

Niveau 3:
Gesuchte Zahl teilweise erkennen. Die Eckwerte (1 und 2) werden als Zahlen und Grenzen gedeutet und die Zahl 1 ½ richtig eingeordnet. Das Kind benennt ½ als „die Hälfte“, es legt die Karte vor die 1 (oder es sagt, dass ½ vor die 1 gehöre). 1 ½ wird als eineinhalb bezeichnet, welches zwischen die 1 und die 2 gehöre. Die Benennung und die Begründung sind noch bruchstückhaft. Die Zählfolge (Seriation) ist vollständig ausgebildet, es ist das handlungs- und erklärungsleitende Schema. Das führt dazu, dass die Mächtigkeit und die Reihenfolge auf den Zahlenstrahl richtig geordnet werden können. Es werden noch keine arithmetischen Operationen mit Bruchzahlen zur Begründung angegeben.
Das folgende Beispiel ist ambivalent. Wir erkennen eine perfekte Seriation. Ganze und gebrochene Zahlen werden erkannt und geordnet, da das Kind die 2 ½ hypothetisch abrufen kann, ist es sinnvoll, seine Handlung diesem Niveau zu zuordnen. Hier das Beispiel:
„Zu vorderst käme die 0 hin, dann 1/2. Die 1 und die 2 sind schon da, dazwischen kommt die 1 1/2. Dann käme 2 1/2 und dann die 3!“ (69)
Wenn 1 ½ gewählt wird und als „Mitte zwischen 1 und 2“ bezeichnet wird, erfolgt die Zuordnung zu Niveau 3. Die Schüler gehen ganz auf die Grafik der Versuchsanlage ein und bilden eine Seriation mit allen Zahlenkarten. Diese kann auch noch Unregelmässigkeiten enthalten wie das folgende Beispiel zeigt:
„Ups, die müsste eigentlich hier hinten hin (legt die 3 rechts neben die 2).
Das ist die da, die 1 1/2. Die ist ja zwischen 1 und 2.“ (Zusätzliche Beobachtung: Er legt die anderen Kärtchen auch noch hin. Alle richtig bis auf "keine".) "Da hat es ja keine Linie mehr".

Kategorien für die Beurteilung der Antworten und der Handlungen erweitert 4

Niveau 3a:
Perfektes Erkennen und Erläutern der gesuchten Zahl. Die Eckwerte (1 und 2) werden als Zahlen und Grenzen gedeutet und die Zahl 1 ½ richtig eingeordnet. Die Benennung und die Begründung sind einwandfrei auf die Fragestellung bezogen. Dazu gehört die Verwendung von *additiven Schemata* wie „ein Halbes dazu nehmen“ oder *die Begründung mit der Teilung von Zahlen oder Darstellung von Zahlen* (Kuchen, Kuchendiagramme, der Bezug zur Strecke zwischen 1 und 2 auf dem Zahlenstrahl, der Bezug zu Längenmassen usf.). Auch Kombinationen von Argumenten können hier vorkommen, z.B. ½ plus 1 ist 1 ½ . Ein Kind begründete die Wahl von 1 ½ mit dem Argument „Das ist die 1.5. Es ist die 1 und ein Halbes dazu. Es liegt in der Hälfte der beiden Zahlen." (40)
Ein anderer Schüler: „1 1/2 ist mehr als 1. 1 und dann noch 1/2 dazu, z.B. 1 cm + 5 mm.“ (65)

Literatur

Bobis, J. (2007). The Empty Number Line: A Useful Tool or Just Another Procedure? *Teaching Children Mathematics, 13*(8), 410-.

Brizuela, B. M. (2004). *Mathematical Development in Young Children. Exploring Notifications*. New York: Teachers College Press.

Brizuela, B. M. (2006). Young Children's Notations For Fractions. *Educational Studies in Mathematics, 62*(3), 281-305.

Cramer, K. A., Post, T.R., delMas, R.C. (2002). Initial Fraction Learning by Fourth- and Fifth-Grade Students: A Comparison of the Effects of Using Commercial Curricula With the Effects of Using the Rational Number Project Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(2), 111-144.

Empson, S. B. (2003). Low-Performing Students and Teaching Fractions for Understanding: An Interactional Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(4), 305-343.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Krauthausen, G., Scherer, P. (2004). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (1. unveränderter Nachdruck). München: Elsevier GmbH.

Ludwig, M. (2004). *Bruchzahlen.* Vorlesungsskript. Pädagogische Hochschule Weingarten. Internet: [www.mathematik.ph-weingarten.de/~ludwig/Vorlesungen/SS2004/didalgebra/skript/kapitel2.pdf] [17.09.07]

Moss, J. (2003). Introducing Percents in Linear Measurement to Foster an Understanding of Rational-Number Operations. *Teaching Children Mathematics, 9*(6), 335-339.

Powell, C. A., Hunting, R.P. (2003). Fractions in the Early-Years Curriculum: More Needed, Not Less. *Teaching Children Mathematics, 10*(1), 6-7.

Rottmann, T. (2006). *Das kindliche Verständnis der Begriffe "die Hälfte" und "das Doppelte"*. Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Siebert, D., Gaskin, N. (2006). Creating, Naming, and Justifying Fractions. *Teaching Children Mathematics, 12*(8), 394-400.

Steencken, E. P., Maher, C.A. (2003). Tracing fourth graders' learning of fractions: early episodes from a year-long teaching experiment. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(2), 113-132.

Stump, S. L. (2003). Designing Fraction-Counting Books. *Teaching Children Mathematics, 9*(9), 546-549.

Thomas, N. D., Mulligan, J.T., Goldin, G.A. (2002). Children's representation and structural development of the counting sequence 1-100. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 117-133.

Watanabe, T. (2002). Representations in Teaching and Learning Fractions. *Teaching Children Mathematics, 8*(8), 457-563.