Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik

Studiengang Sonderpädagogik
Vertiefungsrichtung Schulische Heilpädagogik
Schwerpunkt Pädagogik bei Schulschwierigkeiten

Bruchzahlen, Zahlenstahl und geometrische Modelle mit flexiblen Interviews verstehen

Einleitung

Neu: Aufgaben nach Schwierigkeitsgrad geordnet plus Kroki, pädagogisches Experiment

Stefan Meyer, Dozent HfH

Revidierte Version 02.02.2010; 2013; 2016; 2019

Bruchzahlen verstehen - das Erkenntnisinteresse

Über welche Erfahrungen verfügen Personen im Umgang mit Symbolen und geometrischen Darstellungsformen von Bruch-zahlen?

Wie differenzieren sie zwischen und innerhalb der natürlichen Zahlen und der Bruchzahlen?

Diesen Fragen widmeten sich Studentinnen und Studenten der HfH im Studienjahr 07/08 und 08/09 in Explorationsstudien. Diese erstreckten sich über mehrere Niveaus der Arithmetik und fordert die Kinder zum operativen Interpretieren von Symbolen von Bruchzahlen heraus.

Es spielte keine Rolle, in welcher Klasse die Schüler waren oder ob sie die Bruchzahlen schon behandelt hatten oder nicht.

Brizuela (2006) forderte, dass die symbolischen Darstellungen von Brüchen intensiver erforscht und im Unterricht als generative Teile integriert werden müssten. Duval (1993; deutsch in Meyer, 2017) wies darauf hin, dass Lernen und Verstehen darin bestehen, dass eine Person fähig wird, die *Konversion* von einer in eine andere Darstellungsform logisch-mathematisch zu begründen.

Durch unsere Explorationsstudien wurde ein Set von sieben offenen Aufgaben erzeugt und erprobt. Die Resultate der ersten Studie (Vorübung und Aufgabe 1) liegen vor. Sie sind auf der Webseite des flexiblen Interviews publiziert worden. Die Häufigkeitsverteilungen der zweiten Studie sind auf der Lernplattform abgelegt. Die zweite Studie befindet sich in der Auswertungsphase.

Mit dem Set von offenen Aufgaben kann das Verständnis von Korrespondenzen (Konversionen) zwischen Bruchzahlsymbolen und geometrischen Darstellungen und Figuren qualitativ geprüft und gefördert werden. Die vertiefte Auseinandersetzung mit den Aufgaben kann im Unterricht oder in der Diagnostik stattfinden.

Die Basis-Methode für den Umgang mit diesen Aufgaben ist das flexible Interview. Jede Begegnung zwischen Personen bildet eine einzigartige pädagogische oder psychologische Situation (vgl. Inhelder, Sinclair & Bovet, 1974).

Die untersuchende Person handelt aus, ob die Aufgaben einzeln oder, wie es ein Kroki zeigt, als multiple Handlungszyklen gelöst werden («single or multiple cycles of action», vgl. Bruce (2010, S. 51).

Von 2019 an wird in explorativen Fallstudien versucht, das Verständnis von Bruchzahlen mit *dynamischen und beziehungsreichen Methoden* zu fördern: diagnostic teaching (vgl. Bell, 1993), Empathie und Verstehen (Cuomo, 2007), pädagogisches Experiment i.S. von Lurija & Judowitsch (1982), die Kognitive Akzeleration (Adey, 2008), die PASS-Theorie von Lurija (vgl. Otero, 2014).

Ich danke allen, die zum Gelingen dieser Projekte beigetragen haben und beitragen werden.

Die Inhalte der flexiblen Interviews

Folie 4 zeigt die Interviews im Überblick. Sie sind nach ansteigenden Schwierigkeitsgraden (p) geordnet. Die Zahl der untersuchten Kinder ist mit «n» angegeben. Die Interviews erforschen folgende Themen:

1. Was versteht das Kind unter einem Viertel (enaktiv mit Würfeln)?.
2. Was versteht das Kind unter einen Viertel (ikonisch mit Quadrat)?.
3. Zur Klärung des Vorverständnisses macht man die Vorübung mit dem Zahlenstrahl. - Zahlenstrahl und einfache Bruchzahlen
4. Verdoppeln von 1 ½ und die Summe oder das Produkt auf dem Zahlenstrahl zeigen.
5. Was versteht das Kind symbolisch, wenn es eine Fläche von ½ mal ½ m^2 berechnen soll?
6. Was kommentiert das Kind, wenn es einen Würfel mit der Seitenlänge 1 und acht Würfel mit der Seitenlänge vor sich hat? Enaktive und dialogische Auseinandersetzung mit dem Begriff des Volumens / Rauminhaltes.
7. Die symbolische Auffassung eines Achtels erörtern.
8. Die symbolische Auffassung eines Vierundsechzigstels erörtern. (= nicht normierte Zusatzaufgabe)

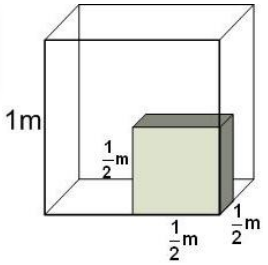
Dimensionen der flexiblen Interviews. Die Auswahl und die Reihenfolge der Interviews trägt dem Schwierigkeitsgrad und der Komplexität Rechnung. Dabei sind Fragen im Spiel wie: denkt das Kind noch additiv, indem es die Teile im Verhältnis zum Ganzen addiert oder subtrahiert? Kann das Kind multiplikativ denken, indem es Beziehungen zwischen den Teilen und dem Ganzen mit multiplikativen Argumenten mit Hilfe von Flächen erläutert ? Oder denkt das Kind, / die Jugendliche multiplikativ und dreidimensional, wenn es die Verhältnisse zwischen Teilen und dem Ganzen mit dem Würfelvolumen erklären kann?

Die Anschauungsmittel erlauben kohärentes Operieren, sei es enaktiv, sei es symbolisch mit dem numerischen Schreibsystem (NSS) der Bruchzahlen. Das Kroki (siehe Folie 5) skizziert, wie die Aufgaben in vier Etappen behandelt und gedanklich vernetzt werden könnten. Im Zentrum stehen mathematische und metakognitive Problemstellungen und Betrachtungen vom Kindergarten bis zur Sekundarstufe.

Die Darstellungsformen und die Darstellungsmittel sind geometrische Objekte (Würfel, Flächen, Zahlenstrahl, Volumen), welche die Arithmetisierung herausfordern (Wittmann, 2006). Auf Alltagsobjekte wie Kuchen oder Lego wurde bewusst verzichtet.

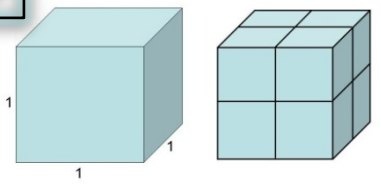
Die flexiblen Interviews, geordnet nach den Schwierigkeitsgraden *(p)*

7



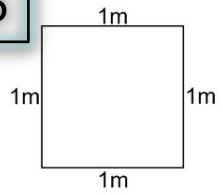
p = .23
n = 164

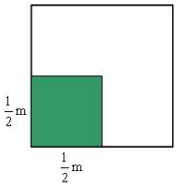
6



p = .20
n = 166

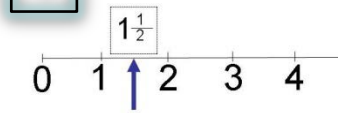
5





p = .20
n = 166

4



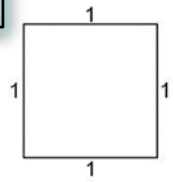
p = .50
n = 201

3

0	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	3	keine

p = .50
n = 203

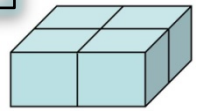
2



$\frac{1}{4}$

p = .76
n = 156

1



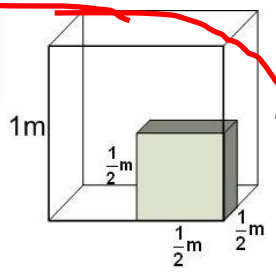
p = .80
n = 193

Durchschnittsalter: 10;8J.
Standardabw.: 3;4J.

Die flexiblen Interviews – ein Kroki zu den Handlungszyklen 1-4

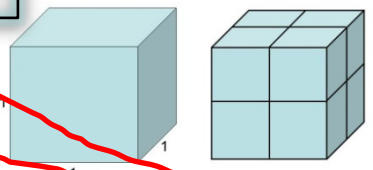
4

7



p = .23
n = 164

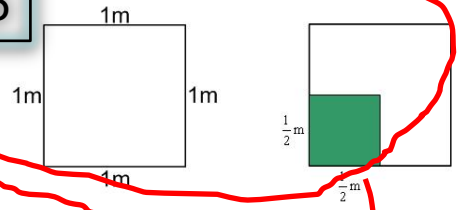
6



p = .20
n = 166

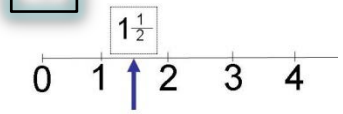
2

5



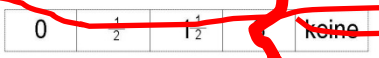
p = .20
n = 166

4



p = .50
n = 201

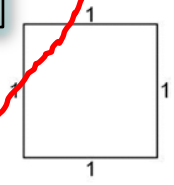
3



p = .50
n = 203

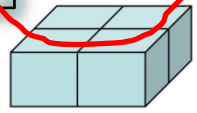
1

2



$\frac{1}{4}$

p = .76
n = 156



p = .80
n = 193

Durchschnittsalter: 10;8J.
Standardabw.: 3;4J.

Hinweise für die Durchführung und Erfahrungen

In den Explorationsstudien konnten Erfahrungen mit den Interviews ab dem Kindergartenalter gesammelt werden. Die Stichprobe reicht bis in die Sekundarstufe 1. Das Durchschnittsalter in der zweiten Studie betrug 10;08 Jahre, die Standardabweichung betrug 41 Monate = 3;05 Jahre (N=207).

Wenn man alle **Aufgaben als Serie von Tests** stellen möchte, sollte man rund 30 Min. reservieren. Die durchschnittliche Durchführungszeit betrug rund 23 Min. (N=207; s = 8 Min.). Befasst man sich mit einer **Aufgabe als ausführliches flexibles** Interview, so benötigt man für eine einzelne ca. 15-20 Min.

Wie erwähnt, können die Aufgaben einzeln oder in kleinen Gruppen gestellt werden. Dann sollte man sie wie eine offene Aufgabe behandeln, bei der die Kinder unter der Moderation der Pädagogin kooperativ Erfahrungen sammeln und austauschen können. Die ‘kognitive Akzeleration’ (Adey, 2008) liefert ein ausgezeichnetes Handlungsmodell für den Umgang mit offenen Aufgaben.

Am Anfang hilft es, wenn man die Gespräche mit Tonband oder mit einer Videokamera aufzeichnet und erst danach protokolliert und interpretiert.

Teile den Kindern mit, welches das Ziel der Befragung ist: Das Offenlegen der Denk- und Handlungsmöglichkeiten im Umgang mit einfachen Bruchzahlen.

Berechne das Alter der Kinder in Monaten, z.B.:

- 2009 / 06 / 20 (Stichtag der Forschungsübung)
- 1999 / 07 / 07 (Geburtstag des Kindes)
- 09 / 11 / 13 (Differenz)
- 119 Mt. Lebensalter in Mt. (9 * 12 + 11)
- *15 Tage und mehr werden aufgerundet.*

Folgende Materialien sollte man bereitstellen:

Papier-Vorlage des Würfels mit der Seitenlänge 1,

acht gleich grosse Holzwürfel (Bezug bei Pastorini, Zürich)

Arbeitsblatt, Bleistift, Schere, Zettel (C5 oder C6), PC, falls man die Aufgaben digital vorstellen will.

Die Folien der einzelnen Aufgaben sind nach dem folgenden Muster aufgebaut:

- Die Instruktion zum Unterthema,
- Die Vorlage, welche man ausdrucken soll. Bei der Vorübung hat es auch noch eine Kopiervorlage zum Ausschneiden von Zahlenkarten.

Spezielle Hinweise für die Durchführung

Die Wahl des Materials und der Etappen (Handlungszyklen, pädagogische Situationen) werden mit dem Kind oder mit dem Jugendlichen oder mit einer Gruppe je nach den Zielsetzungen festgelegt werden.

Dränge das Kind nicht mit Suggestionen zur „richtigen Lösung“. Das ist erfahrungsgemäss am Anfang nicht so leicht. Es ist nützlicher, wenn sogenannte Fehler oder kognitive Konflikte beobachtet und als wertvolle Zwischenerkenntnisse positiv gewürdigt werden. Sie sind die *Rohstoffe für die Schulung des Bruchdenkens*.

Hegel empfahl, mit der *beobachtenden Vernunft* zu arbeiten. Dieses Motto hilft, die eigene Aktivität positiv zu gestalten. Probleme und Neugier machen kreativ. Sie bilden einen Schutz gegen Belehrungsversuche. In diesem Sinn wird das flexible Interview umgesetzt. Piaget und Inhelder, Sinclair & Bovet (1974) bezeichneten es als Methode der kritischen Exploration, in welcher auch die Emotionen und die Beziehung zum Kind und Jugendlichen entscheidend sind.

Das Kind oder der Jugendliche sollen ausdrücken und zeigen, was sie denken und was sie machen, was sie können und was sie noch nicht so gut beherrschen. In den flexiblen Interviews sind alle Denkwege der Kinder und Jugendlichen etwas Bedeutsames. Es geht um dialogisch erforschbare und bestimmbare Einsichten, die sich in einer Entwicklung befinden. Die Entwicklung ist nicht nur etwas Statisches oder Psychologisches. Entwicklung ist v.a. etwas Soziales und Pädagogisches. Insofern geht es immer auch um die Entwicklung des pädagogischen und fachdidaktischen Denkens und Verhaltens der Lehrpersonen (vgl. Cuomo, 2007).

Stichwort ‘Joker’. Das Kind oder die Jugendliche sollten von Anfang an wissen, dass sie die Versuchsleiterin bzw. die Pädagogin um den Joker bitten können. Dann zeigt man dem Kind, wie man die Aufgabe selber löst. Sprich, worüber du nachdenkst. Zeige Emotionen, spiele einen Zahlenkünstler (Arithmetiker), formuliere auch metakognitive Überlegungen. Danach fragst du: «Möchtest du das jetzt auch probieren?»

Beende jede vom Kind oder dem Jugendlichen behandelte Aufgabe mit einer metakognitiven Betrachtung (vgl. Adey, 2008) . Die Fragen sind auf den Aufgabenvorlagen formuliert.

Du hast bei jeder Aufgabe die Möglichkeit, mit dem Kind den Abbruch des flexiblen Interviews auszuhandeln. Besprich die Motive fair. Danke dem Kind oder Jugendlichen, dass sie dich darüber aufklären, wie junge Personen lernen, die Bruchzahlen zu verstehen. Halte mit dem Kind oder dem Jugendlichen Ausschau (Bridging), wie die Auseinandersetzung mit den Bruchzahlen weitergehen könnte.

Bringe in Erfahrung, ob das Kind die Lernziele im Fach, im Förderbereich (Mathematik) insgesamt gut, teilweise gut, weniger gut oder nicht erfüllt.

Beobachte, wie gut die sprachlichen Kompetenzen des Kindes entwickelt sind. Übernimmt es bereits in der ersten Sitzung Elemente aus deiner Art, zu kommunizieren und mit den Objekten zu handeln (vgl. dazu das Konzept der Zone der nächsten Entwicklung i.S. von Wygotski, 1986)? Auch dazu machst du im Datenformular / im Protokollblatt einen Eintrag.

Gesetzt den Fall, dass die Kinder kaum Deutsch sprechen und verstehen, ist es notwendig, den Wortschatz, die Materialkenntnisse sowie Redewendungen **präventiv** (siehe Preteaching) aufzubauen.

Literatur

Adey, P. (2008). *Let's Think! Handbook. A Guide to Cognitive Acceleration in the Primary School*. London: GL assessment.

Bell, A. (1993). Some experiments in diagnostic teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(1), 115–137.

Brizuela, B. M. (2006). Young Children's Notations For Fractions. *Educational Studies in Mathematics, 62(3), 281-305.*

Bruce, S. M. (2010). Reflection, Inquiry, and Action Research in Special Education Teacher Preparation Programs. In S. M. Bruce, Pine, Gerald J. (Hrsg.), *Action Research in Special Education. An Inquiry Approach for Effective Teaching and Learning (S. 47-60).* New York: Teachers College Press.

Cuomo, N. (2007). *Verso una scuola dell'emozione di conoscere. Il futuro insegnante, insegnante del futuro*. Pisa: Edizioni ETS.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37–65.

Inhelder, B., Sinclair, H. & Bovet, M. (1974). *Apprentissage et structures de la connaissance*. Paris: Presses Universitaires de France.

Lurija, A. R. & Judowitsch, F. Ja. (1982). *Die Funktion der Sprache in der geistigen Entwicklung des Kindes*. Frankfurt a.M.: Ullstein.

Meyer, S. (2017). Mathematik-Kurz-Test (MKT) 1-9. Flexible Interviews und Blitzrechnen (FI-B). Internet, . Zugriff am 15.9.2017. Verfügbar unter: https://www.hfh.ch/de/unser-service/shop/produkt/mathematik_kurztest_mkt_19

Otero, T. M. (2014). Intelligence: Defined as Neurocognitive Processing. In S. Goldstein, D. Princiotta & J.A. Naglieri (Hrsg.), *Handbook of Intelligence: Evolutionary Theory, Historical Perspective, and Current Concepts* (2015. Auflage, S. 193–208). New York: Springer.

Wittmann, G. (2006). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen – auch für leistungsschwache Schüler? *mathematica didactica, 29(2), 49-74.*